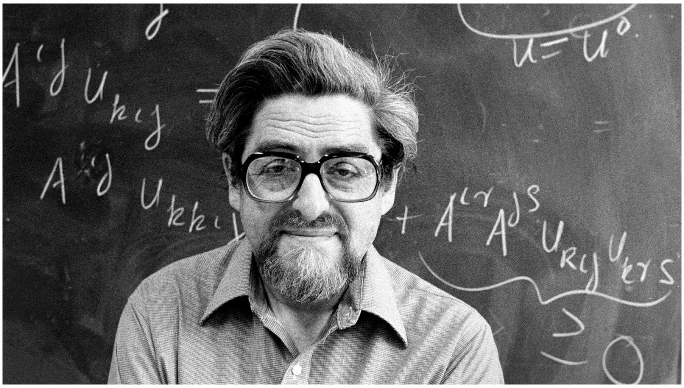
Recordando a Louis Nirenberg y sus matemáticas

por

Juan Luis Vázquez

Resumen. El artículo está dedicado a rememorar la vida y las matemáticas de Louis Nirenberg, insigne matemático canadiense recientemente fallecido en Nueva York, donde residía. Figura emblemática del análisis y las ecuaciones en derivadas parciales en el siglo pasado, fue galardonado con el Premio Abel en 2015. Desde su atalaya del Courant Institute de Nueva York ejerció un magisterio global. Fue buen amigo de España.



One of the wonders of mathematics is you go somewhere in the world and you meet other mathematicians, and it is like one big family. This large family is a wonderful joy.[1]

1. Introducción

Este artículo está dedicado a rememorar la vida y obra del insigne matemático canadiense Louis Nirenberg, nacido en Hamilton, Ontario, en 1925, y fallecido en Nueva York el pasado 26 de enero de 2020 a los 94 años de edad. Profesor durante gran parte de su vida en el mítico Courant Institute de la Universidad de Nueva York, fue considerado uno de los mejores analistas matemáticos del siglo XX, especialista en el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales.

Cuando recibimos la noticia de su fallecimiento fue un momento muy triste para muchos matemáticos, pero también era la ocasión para glosar una vida ejemplar.

[1] De la entrevista a Louis Nirenberg en las *Notices of the AMS*, 2002, [39]

Su obra une campos diversos entre la matemática pura y la matemática aplicada y, en particular, era una figura de culto para las ecuaciones en derivadas parciales, disciplina clave en la formulación matemática de multitud de procesos de las ciencias y la ingeniería. Su obra es un prodigio de agudeza y perfección lógica, y a la vez sus aplicaciones abarcan hoy múltiples campos científicos.

Como reconocimiento a su obra recibió el Premio Abel en 2015, junto con el también genial John Nash. El Premio Abel es uno de los mayores galardones de las Matemáticas, comparable a los premios Nobel de otras ciencias. Por entonces el Courant Institute, del que fue tantas décadas profesor ilustre, publicó bajo el título *Beautiful Minds* una nota de prensa[2] de recomendable lectura.

Louis Nirenberg era miembro distinguido de la American Mathematical Society (AMS), y a lo largo de su vida había recibido muchos otros honores y premios, como el Bôcher Memorial Prize de la AMS (1959), el Premio Jeffery-Williams (1987), el Premio Steele a la trayectoria vital (1994 y 2014), la National Medal of Science (1995), el Premio Crafoord de la Real Academia Sueca en su edición inaugural (1982), y la primera Medalla Chern en el Congreso Internacional de Matemáticos de 2010, concedida por la Unión Matemática Internacional y la Fundación Chern. Fue conferenciante plenario en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Estocolmo en agosto de 1962; la conferencia se tituló *Some Aspects of Linear and Nonlinear Partial Differential Equations*. En 1969 fue elegido miembro de la National Academy of Sciences de los EE.UU.

No eran los honores lo que le preocupaba sino su profesión y la comunidad matemática que le rodeaba. En su larga carrera en el Courant descubrió muchos talentos y colaboró en obras relevantes de ilustres colegas. Hombre sabio en lo científico y lo humano, fue uno de los matemáticos más influyentes y queridos del siglo pasado, y del actual. Su magisterio se extendió primero a los centros internacionales que amaba visitar y luego al mundo entero, pues vivimos en una sociedad científica mundial cuya estrecha conexión tantos bienes aporta al saber. Muchos de sus artículos figuran entre los más citados del mundo.[3]

2. Los orígenes

Para arrancar el recorrido por sus matemáticas nada mejor que citar unos párrafos de la mención del Abel Prize Committee en 2015:[4]

> *Nash y Nirenberg son dos gigantes matemáticos del siglo XX. Están siendo reconocidos por sus contribuciones al campo de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP), que son ecuaciones que involucran tasas de cambio y que originalmente surgieron para describir fenómenos físicos pero, como ellos mostraron, también son útiles para analizar objetos geométricos abstractos.*

[2] `https://www.nyu.edu/about/news-publications/news/2015/march/beautiful-minds-courantsnirenberg-princetons-john-nash-win-abel-prize-in-mathematics-.html`

[3] En el tema 35, EDPs, de la base de datos matemática *MathSciNet*, figuran tres artículos de L. Nirenberg entre los diez más citados de todos los allí recogidos.

[4] Ver `https://www.abelprize.no/nyheter/vis.html?tid=63589`. Traducción del autor.

Louis Nirenberg recibe el Premio Abel de manos del Rey Harald V de Noruega en presencia de John Nash (foto: Berit Roald/NTB scanpix).

> *El comité Abel escribe: «Sus avances han dado lugar a técnicas versátiles y robustas que se han convertido en herramientas esenciales para el estudio de las EDPs no lineales. Su impacto se puede sentir en todas las ramas de la teoría».*
>
> *[...] Nirenberg ha tenido una de las carreras más largas y más celebradas en la ciencia matemática, habiendo producido resultados importantes hasta pasados los 70 años de edad. A diferencia de Nash, que escribió artículos en solitario, Nirenberg prefirió trabajar en colaboración con otros, más del 90 por ciento de sus artículos están escritos conjuntamente. Muchos resultados en el mundo de las EDPs elípticas llevan el nombre de él y sus colaboradores, como por ejemplo las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, la desigualdad de John-Nirenberg y la teoría de Kohn-Nirenberg de operadores pseudo-diferenciales.*
>
> *[...] Lejos de limitarse a las soluciones de los problemas para los que fueron diseñados, los resultados probados por Nash y Nirenberg se han convertido en herramientas muy útiles y han encontrado enormes aplicaciones en ulteriores contextos.*

Para ser precisos, Nirenberg hizo contribuciones fundamentales en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales tanto lineales como no lineales, el análisis funcional, y su aplicación en geometría y en análisis complejo. Entre las aportaciones más famosas que comentaremos están la desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg, la cual es importante en la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas que surgen dentro de muchas áreas de las matemáticas, la formalización de los espacios BMO de oscilación media acotada, y otras que iremos viendo.

Un trabajo de enorme repercusión fue la obra con Luis Caffarelli y Robert Kohn encaminada a solucionar el gran problema abierto de existencia y suavidad (*smoothness*) de las soluciones del sistema de Navier-Stokes de mecánica de fluidos. Este trabajo fue descrito por la AMS en 2002 como «uno de los mejores que se hayan hecho». El problema figura en la lista de Problemas del Milenio confeccionada por la Fundación Clay y es uno de los problemas abiertos más atrayentes de la física matemática, planteado hace casi dos siglos. El último teorema de Fermat y la conjetura de Poincaré han sido vencidos en el cambio de siglo, pero el enigma de Navier-Stokes (y el de su pariente el sistema de Euler) siguen en pie. Trataremos el tema en detalle en la sección 4.

2.1. Los comienzos. De Canadá a Nueva York

Louis Nirenberg creció en Montreal, donde su padre era profesor de hebreo. Después de completar su licenciatura[5] en 1945 en McGill University, Montreal, Louis encontró un trabajo de verano en el Consejo Nacional de Investigación de Canadá, donde conoció al físico Ernest Courant, hijo de Richard Courant, profesor en la Universidad de Nueva York. Ernest mencionó a Nirenberg que iba a Nueva York para ver a su padre y Louis le rogó que le pidiera consejo sobre un buen lugar para hacer estudios de posgrado en física. Regresó con la invitación de Richard Courant para que Louis fuera a la Universidad de Nueva York (NYU) para hacer un máster en matemáticas, tras lo cual estaría preparado para un programa de física. Pero una vez que Louis comenzó a estudiar matemáticas en NYU nunca se cambió. Hizo la tesis doctoral con James Stoker en 1949, resolviendo un problema de geometría diferencial. Los dados ya estaban echados. Llegamos así a un momento crucial en la vida de Louis. Rompiendo con la recomendación[6] de que «un doctor reciente debería moverse a un entorno diferente», Richard Courant mantuvo junto a sí a sus mejores estudiantes, incluyendo a Louis Nirenberg, para crear su Instituto Matemático de la NYU, el famoso Courant Institute, que se ha convertido en un referente mundial de la alta matemática, solo comparable en la Costa Este de los EE.UU. con el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Louis fue primero postdoc y luego profesor permanente. Allí pasó su vida.

2.2. Ecuaciones y geometría

El problema que Louis recibió de Stoker para su tesis, titulada *The Determination of a Closed Convex Surface Having Given Line Elements*, se llama «el problema de embedding». En términos generales, se enuncia así: dada una función de distancia definida en la esfera 2-dimensional, la pregunta es si se puede construir una superficie en el espacio tridimensional de manera que esta función de distancia coincida con la

[5]Con un grado en matemáticas y física, también en matemáticas ser bilingüe cuenta.
[6]Recomendación que forma parte esencial de la práctica profesional norteamericana.

que se hereda de la distancia usual euclídea en el espacio $\mathbb{R}^3$. El gran matemático alemán Hermann Weyl había dado un primer paso significativo para resolver el problema en 1916, y Nirenberg, como estudiante, completó la construcción de Weyl. El trabajo consistió en resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales del tipo llamado «elíptico». Es el tipo de ecuaciones y de aplicación en que Louis Nirenberg trabajó preferentemente desde entonces. El progreso ha sido lento pero continuado en el tiempo y es, hoy día, enorme.

3. El poder y la belleza de las desigualdades

Pasamos ahora a describir algunos de los temas más relevantes del amplio legado de Louis Nirenberg y, al tiempo, más cercanos a nuestros conocimientos. (Casi) toda carrera en EDPs se inicia con el estudio de las ecuaciones elípticas lineales. Estas forman hoy una teoría muy establecida en la que el análisis funcional, el cálculo de variaciones y las representaciones explícitas se combinan para producir soluciones en los espacios funcionales adecuados. Para las ecuaciones clásicas de equilibrio en mecánica de medios continuos, que se conocen como las ecuaciones de Laplace y Poisson, $\Delta u = f$, hay un «principio del máximo» clásico que proporciona las estimaciones necesarias para la existencia y unicidad, y combinado con hábiles trucos del oficio permite obtener estimaciones más finas, como regularidad y otras propiedades. Citemos las que se conocen como estimaciones de Harnack y Schauder [28, 36]. A este respecto, se cita a Nirenberg diciendo, ya sea en broma o en serio,

I made a living off the maximum principle.[7]

Gran parte de los problemas interesantes con EDPs que vienen propuestos por la física y otras ciencias son no lineales, por ejemplo las ecuaciones de los fluidos o los problemas de curvaturas en geometría. Estos problemas no lineales rara vez pueden ser resueltos mediante fórmulas explícitas. El estudio matemático de esos problemas ha atraído la atención creciente de las mejores mentes del siglo pasado, con notables éxitos. El enfoque habitual es que la solución tiene que ser obtenida por algún tipo de aproximación, y el punto esencial es, por lo general, mostrar que el o los procedimientos de aproximación propuestos convergen a una solución (tomada en algún sentido aceptable para la física, como es la solución en el sentido débil o la solución en el sentido de distribuciones). Una complicada maquinaria de topología y análisis funcional está disponible para probar dicha convergencia, a condición de que se cumplan ciertas estimaciones que permitan controlar la aproximación. Ver, en este sentido, el libro de Brezis [7] que muchos hemos estudiado de jóvenes.

Una gran parte del trabajo del «Analista de EDPs»[8] consiste, pues, en hallar estimaciones que controlen el paso al límite o el teorema del punto fijo a aplicar. Como se dice en inglés: *Existence theorems come from a priori estimates and suitable*

[7] Louis dice «Me he ganado la vida con el principio del máximo». Curiosamente yo también, mi artículo más leído [65] trata del «Principio del Máximo Fuerte».

[8] *Analysis of PDEs* es un área de las Matemáticas en los EE.UU. que describe perfectamente nuestra especialidad, que no es ni pura ni aplicada ni deja de serlo. Tal denominación no se usa entre nosotros y eso es, en mi opinión, fuente de algunos males conocidos.

functional analysis.[9] Estimación es la palabra clave en el mundo que nos legaron Louis Nirenberg y sus colegas. «Estimación» significa lo mismo que «desigualdad», desigualdad funcional o numérica se entiende.

Puede resultar sorprendente para el lector que las desigualdades, y no las igualdades (o identidades), sean el meollo técnico de una teoría tan central de las matemáticas, pero ésta es la revolución matemática que estaba sucediendo. Cuando Nirenberg llegó a NYU, el investigador destacado más activo era Kurt Otto Friedrichs, quien influyó de manera decisiva en su futura carrera investigadora. Friedrichs amaba las desigualdades, tal como Louis dejó dicho:

> *Friedrichs was a great lover of inequalities and that affected me very much. The point of view was that the inequalities are more interesting than the equalities.*[10]

Llevando adelante esa idea, Nirenberg ha sido unánimemente reconocido como un «maestro mundial de las desigualdades». He aquí otra frase de Louis:

> *I love inequalities. So if somebody shows me a new inequality, I say "Oh, that's beautiful, let me think about it," and I may have some ideas connected to it».*[11]

Durante muchos años, matemáticos de todas partes del mundo acudieron al Courant Institute para buscar su consejo sobre cuestiones en que intervenían desigualdades.

Y ahí estamos. No renunciamos a la belleza de la solución exacta si la hay, pero las desigualdades funcionales son nuestro firme apoyo en un mundo incierto que está por descubrir y describir. El punto técnico central de la moderna teoría de EDPs consiste en demostrar las estimaciones más adecuadas en la forma más fuerte posible.

3.1. Sóbolev, Gagliardo y Nirenberg

Hay muchos tipos de estimaciones que uno necesita en el estudio de las EDPs no lineales, pero algunas han resultado ser mucho más relevantes que otras. Particularmente famosas y útiles son las que estiman las normas de funciones pertenecientes a los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, en términos de sus derivadas (débiles) de diversos órdenes. Suelen ser colectivamente llamadas *estimaciones de Sóbolev* en honor al gran matemático ruso Serguéi L. Sóbolev, debido a su obra seminal [61], 1938. En 1959, Emilio Gagliardo [32] y Louis Nirenberg [52] dieron una prueba independiente y muy simple de la siguiente desigualdad:

TEOREMA (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sóbolev). *Sea $1 \le p < n$. Existe una constante $C > 0$ tal que la desigualdad*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p^* := np/(n-p),$$

[9]Los teoremas de existencia provienen de estimaciones a priori y el análisis funcional pertinente.

[10]Friedrichs fue un amante de las desigualdades y eso me afectó mucho. Su punto de vista era que las desigualdades son más interesantes que las igualdades.

[11]Amo las desigualdades. De modo que si alguien me muestra una nueva desigualdad, yo digo «Oh, eso es muy lindo, déjame pensarlo», y es posible que se me ocurran algunas ideas conectadas con ella.

es cierta para toda función $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. La constante C depende solo de p y n. El exponente p^* se llama conjugado de Sóbolev de p. Du indica el vector gradiente.

Gagliardo y Nirenberg incluían como punto de partida el importante caso $p = 1$, dejado de lado por Sóbolev. La desigualdad implica la inclusión continua del espacio de Banach llamado $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ (*teorema de inmersión*). Versiones para funciones definidas en abiertos acotados siguieron de manera natural. Esta desigualdad pronto atrajo múltiples aplicaciones y multitud de variantes y mejoras. Notables son las versiones con funciones definidas sobre variedades riemannianas. Comentamos a continuación cuatro aspectos adicionales que nos parecen apropiados para el lector curioso.

(i) Thierry Aubin [3] y Giorgio Talenti [63] obtuvieron en 1976 la mejor constante de esa desigualdad, hallando las funciones que peor se portan para ella. Contradicción gramatical aparente que da lugar a hermosas funciones. En efecto, cuando $1 < p < n$ el máximo cociente $\|u\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}/\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ es realizado de forma óptima por la función

$$U(x) = \left(a + b\,|x|^{p/(p-1)}\right)^{-(n-p)/p},$$

donde $a, b > 0$ son constantes arbitrarias.[12] Es el famoso perfil de Talenti. Nótese que $(n-p)/p = n/p^*$. Se comprueba que U es una densidad de probabilidad (integrable) si $(n-p)/(p-1) > n$, es decir, si $1 < p < p_c = 2n/(n+1)$. El perfil U y sus potencias aparecen por doquier. Así, en difusión no lineal lo encontramos como una potencia del perfil de Barenblatt en difusión rápida (ver el capítulo 11 de [66]), y curiosamente el exponente crítico p_c también aparece, pero con consecuencias al contrario.

(ii) La obra de Gagliardo y Nirenberg se extiende a la famosa *desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg*, un resultado de la teoría de los espacios de Sóbolev que estima una cierta norma de una función en términos de un producto de normas de la función y de sus derivadas. Entramos en el reino de la complejidad.[13] Ver detalles en [8].

(iii) En 1984 Luis Caffarelli, Bob Kohn y Louis Nirenberg tenían necesidad de unas desigualdades del tipo anterior en espacios funcionales de tipo Lebesgue, pero con pesos, y así se gestó el artículo [16] sobre las famosas *estimaciones CKN* para espacios con pesos de tipo potencial, origen de una extensa literatura.

(iv) En 2004 D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret y C. Villani [22] usaron métodos de transporte de masa para obtener versiones fuertes[14] de las desigualdades de Sóbolev-Gagliardo-Nirenberg. El transporte de masa es uno de los más potentes nuevos instrumentos usados en la investigación en EDPs. Este tema

[12] Fíjese el lector en el caso simple $a = b = 1$, $p = 2$ en $n = 4$. La función se parece un poco a la gaussiana, pero no lo es.

[13] Renunciamos a enunciar estas desigualdades que se pueden encontrar en las referencias que se citan.

[14] En inglés, *sharp*.

está relacionado con las desigualdades isoperimétricas, de vieja fama, que viven momentos de fructífera coincidencia con las de Sóbolev. De esta relación habla el *survey* [13].

El mundo de estimaciones que hemos esbozado es, hoy día, un espacio enorme presidido por los ilustres nombres anteriores, así como los de H. Poincaré, J. Nash, G. H. Hardy, C. Morrey, J. Moser, N. Trudinger y otros de gran mérito. El libro de Hardy, Littlewood y Pólya [38] ejerció una gran influencia sobre generaciones de analistas. Un libro recomendable sobre la importancia de las desigualdades en Física es el segundo volumen de las obras escogidas de Elliott Lieb [48].

Por poner un ejemplo de entre la numerosa obra reciente, deseo mencionar el artículo de M. del Pino y J. Dolbeault [23] —completado con otros dos artículos en 2003— que establece una nueva versión óptima de las desigualdades euclídeas de Gagliardo-Nirenberg. Ello les permite obtener las tasas de convergencia a los perfiles de equilibrio de algunas ecuaciones de difusión no lineal, como las de tipo «medios porosos», uno de los intereses permanentes de mi investigación. Nuevas desigualdades funcionales basadas en entropías, principios del máximo y procesos de simetrización nos permitieron hallar tasas de convergencia para ecuaciones de difusión muy rápida en [6], resolviendo en 2009 un problema muy estudiado en esos años. Fueron casi tres años de esfuerzo de un equipo de cinco personas, más el trabajo de los autores precedentes.

Por último, existe una gran actividad en el mundo de los espacios de Sóbolev de orden fraccionario y las difusiones fraccionarias asociadas (ver, por ejemplo, [19] o [25]). Es un tema en plena ebullición que forma parte de mis desvelos matemáticos.[15]

3.2. Nuevos espacios. John y Nirenberg

Volvamos a los orígenes. El caso límite de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sóbolev sucede para $p = n$. Gracias a las desigualdades de C. Morrey se sabe que, para $p > n$, las funciones resultantes son funciones Hölder continuas, [28]. Pero el caso $p = n$ era extraño y fueron Fritz John y Louis Nirenberg quienes resolvieron el enigma en 1961 en [40], mediante la introducción del nuevo espacio BMO de funciones de oscilación media acotada. En realidad, BMO no es un espacio de funciones sino de clases de funciones módulo constantes. Para este espacio se da la desigualdad justa.

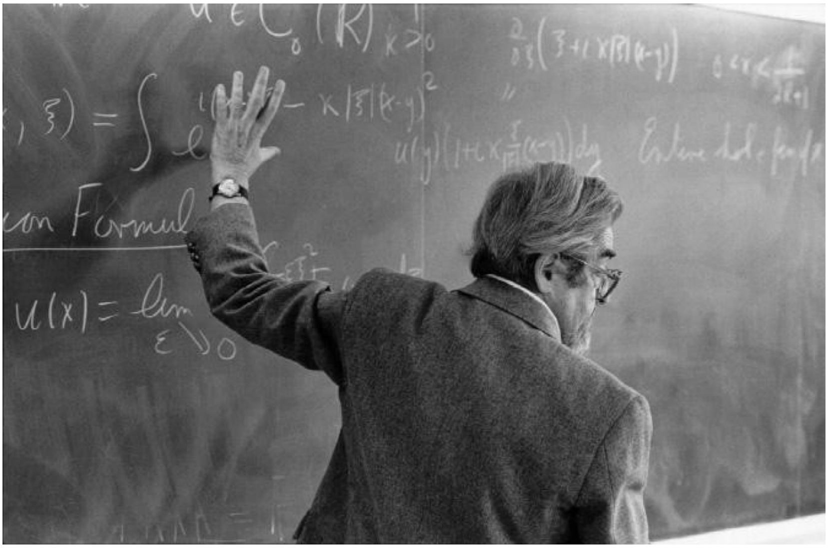
TEOREMA (John-Nirenberg). *Si $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ entonces u es una función* BMO *y*

$$\|u\|_{\mathrm{BMO}} \leq C\|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)},$$

para una constante $C > 0$ que depende solo de n.[16]

[15] Hay una amplia representación de matemáticos españoles activos en estos temas, con resultados notables que bien merecerían una reseña.

[16] El lector curioso se preguntará qué función optimiza la constante. Le invito a buscarla.



Nirenberg en la pizarra (foto: Courant Institute, NYU).

Los espacios BMO son uno de los objetos novedosos muy populares en el análisis funcional y armónico, y reemplazan a L^∞ cuanto toca. Fueron caracterizados por Charles Fefferman en [29]. Los espacios BMO son un poco más extensos que L^∞. La posible desigualdad (e inmersión funcional) de John-Nirenberg usando L^∞ en vez de BMO como espacio imagen puede parecer razonable pero es falsa.[17] Mucho cuidado, pues, con los casos críticos, que Louis trataba con esmero. Los espacios de John-Nirenberg se utilizan en análisis, en ecuaciones en derivadas parciales, en procesos estocásticos y en múltiples aplicaciones.

4. Ecuaciones de Navier-Stokes

El sistema de ecuaciones de Navier-Stokes describe la dinámica de un fluido viscoso incompresible y fue propuesto en el siglo XIX para corregir las ecuaciones de Euler de los fluidos ideales y adaptarlas al mundo real viscoso. Se trata del sistema

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\,\nabla p = \nu\,\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{f}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

donde $\mathbf{u}$ es el vector velocidad, p es la presión y tanto ρ (la densidad) como ν (la viscosidad) se pueden considerar constantes positivas. Ha tenido un éxito espectacular en la ciencia práctica y la ingeniería, pero sus aspectos matemáticos esenciales (existencia, unicidad y regularidad) han ofrecido una rocosa resistencia en dimensión tres (tres o mayor que tres para el matemático).

[17] Se pide amablemente al lector que encuentre un contraejemplo elemental.

Trabajos fundamentales para enmarcar la teoría en un marco funcional moderno se deben a Jean Leray [45, 46], que en 1934 ya habla de derivadas débiles en espacios de funciones integrables. Fue pronto probado, con los nuevos métodos de estimaciones del análisis funcional, que en dimensión $n = 2$ se puede demostrar existencia y unicidad de soluciones de Leray. Además, para datos iniciales regulares la solución es clásica. Pero el avance se detuvo en dimensión superior. Damos la palabra a Charles Fefferman, de la Universidad de Princeton, y su descripción del problema abierto como Problema del Milenio de la Fundación Clay. Se trata de probar o refutar la siguiente afirmación:[18]

> *(A) Existencia y regularidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en* $\mathbb{R}^3$. *Tomemos viscosidad constante* $\nu > 0$ *y dimensión espacial* $n = 3$. *Supongamos que* $u_0(x)$ *sea cualquier campo vectorial regular con divergencia nula que satisfaga ciertas condiciones de regularidad y de decaimiento* [se especifican en el texto original]. *Podemos tomar la fuerza externa* $f(x, t)$ *idénticamente nula. Entonces, existen funciones regulares* $p(x, t)$, $u_i(x, t)$ *en* $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ *que satisfacen el sistema Navier-Stokes con las condiciones iniciales dadas en todo punto del espacio.*

El avance más significativo en este campo es el artículo [15], en el que Caffarelli, Kohn y Nirenberg atacaron el problema de la regularidad y demostraron que, si una solución con datos clásicos desarrolla singularidades con el paso del tiempo, el conjunto de tales singularidades es, en todo caso, pequeño en medida. Más concretamente, «la medida unidimensional, en el sentido de Hausdorff, del conjunto de posibles singularidades (situadas en el espacio-tiempo) es cero». Ello implica que el conjunto singular, si existe, no puede contener ninguna línea o filamento. En 1998 F. H. Lin [49] dio una interesante nueva prueba de este resultado.

Hablamos de uno de los grandes hitos de la carrera de los autores, que sucedió durante la estancia del joven Luis Caffarelli en el Courant Institute a invitación de Louis y fue publicado en 1982. El tema fluidos es completamente diferente de la sección anterior, pero las estimaciones funcionales en espacios de Sóbolev juegan un papel esencial, junto con la teoría de la medida geométrica.

La posible presencia de estas singularidades fue conjeturada por Leray como posible explicación del fenómeno de la turbulencia. Según esta hipótesis, incluso para datos regulares, las soluciones en tres o más dimensiones pueden desarrollar, en un tiempo finito, singularidades en la forma de puntos donde la llamada vorticidad se hace infinita.

En el tiempo transcurrido no se ha podido probar ni refutar la conjetura (A). Se han invertido cuantiosos esfuerzos que un día darán fruto. Hacia 2008 [21], P. Constantin escribió un relato del estado de la cuestión en las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Por el momento nos entretienen multitud de falsas pruebas (algunas bastante bien publicadas). Existen excelentes textos generales sobre Navier-Stokes, como [33] y [64]. Dos textos muy recientes son [59] y [60].

[18] Ver la descripción completa del problema en `https://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf`.

5. Ecuaciones elípticas y cálculo de variaciones

Por razones de selección y espacio seremos breves en un tema en el que Louis hizo tantas contribuciones. Citamos, ante todo, el artículo [9] de Haïm Brezis y Louis Nirenberg que se cuenta entre los más leídos de ambos autores. Trata de la existencia de soluciones de ecuaciones elípticas semilineales con exponente crítico (una vez más)

$$\Delta u + f(x,u) + u^{(n+2)/(n-2)} = 0.$$

Otros dos artículos que tuvieron gran repercusión son colaboración con Shmuel Agmon y Avron Douglis [1], año 1959, y [2], año 1964. Tratan de estimaciones cerca del borde para soluciones de ecuaciones elípticas que satisfacen condiciones generales de contorno. El comportamiento cerca del borde de las soluciones de EDPs no lineales o degeneradas, o en dominios con borde irregular, es un tema difícil, de actualidad permanente en nuestra comunidad. Y de interés práctico, piénsese en el comportamiento de los fluidos en dominios con ángulos.

El artículo [17] con L. Caffarelli y Joel Spruck trata el problema de Dirichlet para ecuaciones elípticas más generales, del tipo Monge-Ampère, territorio entonces apenas explorado, objeto de importantes estudios de L. Caffarelli, y de gran relevancia hoy día (ver, entre otras referencias, [30] y [37]).

El artículo [5] con H. Berestycki y S. R. S. Varadhan une el estudio del primer autovalor con el principio del máximo del que Louis tanto disfrutaba. En este contexto entra el famoso artículo sobre el método de los *«moving planes»* de 1991 [4], en colaboración con Henri Berestycki, que siempre he tenido por una joya.

En el cálculo de variaciones citemos el artículo [11] con Brezis, sobre la diferencia entre minimizadores locales en los espacios H^1 y C^1 (ver también [10]).

Tema de gran interés para Louis fueron las propiedades geométricas, como la simetría. Los artículos [34, 35] con Basilis Gidas y Wei Ming Ni tratan sobre la simetría radial de ciertas soluciones positivas de ecuaciones elípticas no lineales que viene impuesta por la ecuación y la forma del dominio.

6. Otras contribuciones

Reunimos aquí breves comentarios sobre resultados importantes obtenidos por Louis y sus colaboradores en diversos temas que merecerían tratamiento por extenso, por lo cual pedimos disculpa al lector experto.

6.1. Teoría de operadores

Nirenberg y Joseph J. Kohn[19] introdujeron la noción de operador pseudo-diferencial, que ayudó a generar una enorme cantidad de trabajo posterior en la brillante escuela de análisis armónico. En un artículo de 1965 [44] se ocuparon de los operadores pseudo-diferenciales con una visión algebraica y completa. Los operadores en

[19] J. J. Kohn es un brillante analista de Princeton, a no confundir con R. Kohn del Courant. J. J. Kohn habla perfecto español con acento ecuatoriano.

cuestión actúan sobre el espacio de distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^n$, y se estiman en términos de normas de la transformada de Fourier. La importancia de estos resultados es que tienen en cuenta todos los «términos de orden inferior», difíciles de tratar en artículos anteriores. Ver también el volumen [54] editado por Louis.

6.2. Problemas de frontera libre

En 1977 Louis publicó con David Kinderlehrer el artículo [41] sobre la regularidad de los problemas de frontera libre para ecuaciones elípticas; eran los comienzos de una época que fue de gran progreso. Resumiendo, supongamos que u es una solución del problema

$$\Delta u \leq f, \quad u \geq 0, \quad (\Delta u - f)\, u = 0$$

definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Se dan además datos de contorno en la frontera fija ∂D. Se pretende, con estos datos, determinar no solo u, sino también el dominio de positividad $\Omega = \{x \in D : u(x) > 0\}$; o mejor aún el borde de Ω dentro de D, llamado frontera libre:

$$\Gamma(u) = \partial\Omega \cap D.$$

Para hacernos una idea física, podemos suponer una membrana en el espacio $\mathbb{R}^3$ de altura $z = u(x, y)$ que está sujeta a unas condiciones de contorno $u = g \geq 0$ en ∂D y se ha de mantener por encima de una tabla (obstáculo) de altura $u_{\text{obs}} = 0$. En la parte libre $u > 0$ se satisface une ecuación elástica $\Delta u = f$ pero, a priori, no sabemos cuál es esa parte. Es pues un problema que combina EDPs y geometría. Se sabía que este problema tiene solución única (u, Γ). El lector atento observará que, una vez conocida Γ, y con ella Ω, el problema de EDPs para hallar u es elemental. La dificultad está pues en la geometría, pero la solución al puzzle se encontró en el análisis no lineal, [43], que además produce métodos numéricos eficientes.

A continuación se plantea un gran problema: determinar cuán regular es el conjunto Γ hallado por métodos abstractos y cuán regular es u cerca de Γ. Kinderlehrer y Nirenberg dan condiciones locales sobre f y asumen una cierta regularidad inicial de u para concluir que entonces Γ es una hipersuperficie muy regular, incluso analítica. El estudio de fronteras libres se extiende a problemas de evolución, como el llamado problema de Stefan tratado por Louis en [42]. Los años 1980 fueron años de gran progreso en la comprensión matemática de las fronteras libres, con libros de referencia como [26] y [31].

Este es un campo de muy intensa actividad tanto teórica como aplicada, en que he trabajado con un gran deleite durante décadas. Una referencia obligada para el estudio profundo de la regularidad de fronteras libres es el libro [18] de L. Caffarelli y S. Salsa, ver también Petrosyan et al. [57]. Un estudio de modelización del crecimiento de tumores visto como problema de fronteras libres fue hecho en [56], es un ejemplo de una vasta literatura.

6.3. Ecuaciones geométricas

El artículo [50] con Charles Loewner en 1974 trata de EDPs que son invariantes ante transformaciones conformes o proyectivas. El lector recordará, en este contexto, la relevancia actual de EDPs ligadas a problemas de geometría riemanniana, como el problema de Yamabe. Véase un extenso panorama debido a Yan Yan Li, alumno doctoral de Louis y ahora profesor en Rutgers, en el largo artículo [47].

6.4. Geometría compleja

Fue este un tema que interesó mucho a Louis en sus comienzos. Junto con A. Newlander escribieron en 1965 un artículo publicado en *Annals of Mathematics* [51] sobre coordenadas analíticas en variedades cuasi complejas. El teorema de Newlander-Nirenberg afirma que toda estructura cuasi compleja integrable está inducida por una estructura compleja. La integrabilidad se expresa mediante una lista de condiciones diferenciales.

Terminamos aquí el recorrido matemático, desgraciadamente injusto por motivo de la brevedad y de mi desconocimiento en tantos temas. Esperamos que la amplia literatura citada sea muestra de la profunda influencia de Louis Nirenberg y su mundo sobre los matemáticos y las matemáticas que le hemos seguido. Para el lector curioso, existen excelentes artículos que versan sobre la obra o la vida de Louis Nirenberg; un congreso en su honor con ocasión del 75 aniversario fue organizado por Alice Chang et al. y se recoge en [20]. Allyn Jackson le hizo una conocida entrevista para las *Notices de la AMS* en 2002 [39], y Simon Donaldson,[20] Medalla Fields, escribió en la misma revista en 2011, [27]. El artículo de Yan Yan Li [47] en 2010 se centra en el análisis de los problemas geométricos. Con motivo del premio Abel, Xavier Cabré escribió una reseña en catalán en [12], y Tristan Rivière relata su obra en EDPs en [58].

7. El sabio tranquilo y España

Me permitirá el amable lector que concluya esta semblanza con algunos apuntes personales, relacionados con nuestro país. Mi primer recuerdo de Louis Nirenberg nos sitúa en Lisboa en la primavera de 1982.[21] Él ya era famoso y yo era novel. Allí escuché una de sus charlas, que unía la profundidad de las matemáticas, la sencillez de la exposición y una gracia para añadir algún comentario tan oportuno como simpático, características que deleitaban al público. Arte optimista con pedagogía y sin artificio.

En el otoño de ese mismo año llegué a los EE.UU., a la Universidad de Minnesota,[22] para trabajar en problemas de fronteras libres con Don Aronson y con Luis Caffarelli, que regresaba del Courant. Entonces vi, a través del grupo de grandes profesores al que tuve acceso, que en la investigación matemática una vida mucho mejor era posible. Entre ese grupo de amigos se contaban Haïm Brezis y Luis Caffarelli, que han sido mis maestros, Louis Nirenberg, Constantine Dafermos, Donald

[20]Otro gran matemático amigo de España.

[21]En el Symposium Internacional en Homenaje al profesor José Sebastião e Silva.

[22]Esta universidad norteamericana era muy popular entre los jóvenes graduados y doctores españoles por la excelencia de sus estudios de matemáticas y de economía.

Nirenberg en Barcelona en 2017 (foto: Jordi Play).

Aronson, Mike Crandall, Hans Weinberger… Nunca dejaré de darles las gracias por esa visión.

Al cabo de unos pocos años tuve el honor de participar en la organización de un curso de verano en la UIMP[23] que contó con Louis Nirenberg como profesor, junto a Don G. Aronson (Minnesota), Philippe Bénilan (Besançon), Luis A. Caffarelli (IAS Princeton) y Constantine Dafermos (Brown). Estos cursos fueron inspirados por Luis Caffarelli, estrecho colaborador y amigo de Louis, con el apoyo del entonces rector de la UIMP, Ernest Lluch,[24] y de alguna manera transmitieron un cierto talante de las matemáticas que se venían haciendo alrededor del Instituto Courant. El curso tuvo una consecuencia reseñable. Un joven matemático de Barcelona, Xavier Cabré, estudiante en el curso, se fue con Louis Nirenberg al Courant Institute y así empezó una carrera matemática a nivel internacional, como la que tantos jóvenes ansían hoy día. Su tesis, dirigida por Louis, se tituló *Estimates for Solutions of Elliptic and Parabolic Equations* (NYU, 1994). A raíz de su estancia en Nueva York publicó con Luis Caffarelli el hermoso libro [14] sobre las llamadas *ecuaciones elípticas completamente no lineales*. Cabré es ahora Profesor ICREA en la UPC en Barcelona. Louis Nirenberg visitó España varias veces, en especial Barcelona, y tuvo muchos amigos y admiradores españoles.

Aunque no llegué a ser colaborador de Louis, tuve ocasión de verle y conversar con él en diversas ocasiones. Destaco una estancia en el Courant en el invierno de 1996 donde pude apreciar el día a día del «sabio tranquilo», o un congreso en Argentina

[23] Universidad Internacional Menéndez Pelayo, el curso tuvo lugar en 1987 en el Palacio de la Magdalena en Santander.

[24] De imborrable memoria, gran protector de las ciencias y gran conversador, murió trágicamente por ser buena persona en un muy mal momento.

en 2009, cuando ya era muy sénior pero amaba la vida como el primer día. El último evento en que le vi tuvo lugar en Columbia University, Nueva York, en mayo del año pasado (2019), en un congreso en honor a Luis Caffarelli. ¡Iba a algunas charlas en su silla de ruedas a los 94 años, y con su buen humor proverbial decía que le costaba seguirlas!

Impresionados por su figura, el joven matemático David Fernández y yo escribimos una semblanza suya en dos entradas en el blog *La República de las Matemáticas* que editamos en *Investigación y Ciencia*. Lo titulamos «Louis Nirenberg, el sabio tranquilo» (I) y (II).[25] Él era un maestro como los que describe George Steiner en [62], donde *el intenso encuentro personal entre maestro y discípulo es lo que interesa.* Louis tuvo 46 estudiantes doctorales, muchos de ellos matemáticos conocidos.[26] No fue su estilo escribir largos textos, fue autor de [53] y el recientemente publicado [55].

Echaremos de menos al maestro y amigo sénior que siempre aparecía gentil, que amaba Italia (*il bel paese*), la cultura, la buena comida y conversar sobre cine y amistades, y con el que las matemáticas eran fáciles y apasionantes. Nirenberg vivió en Nueva York desde 1949, en el Upper West Side, era un perfecto neoyorkino y al tiempo un ciudadano del mundo. Trabajó hasta el final de su vida, visitando frecuentemente «su» Instituto. Afortunado él, cuánto lo envidio, ahora y aquí los «mayores» parecemos prescindibles para la utilidad pública.

Estoy orgulloso de llevar su nombre Louis = Luis, como Luis Caffarelli o Jacques Louis Lions o Luigi Ambrosio. Es ya un gran nombre en matemáticas y es un honor que conlleva la carga de trabajar como Louis Nirenberg, solo para lo mejor y siempre de buen humor, y eso no es fácil. Descansa en la paz eterna, Maestro. En los campos elíseos tendrás tiempo para pensar en nuevas desigualdades funcionales, las hermosas funciones que las optimizan y sus sorprendentes frutos. Nosotros a nuestro modo también andamos tras ellas, como en [24].

Agradecimientos y créditos

En la redacción de este ensayo he utilizado, además de *MathSciNet*, documentos de dominio público como Google Scholar, Wikipedia, biografías de McTutor History of Mathematics, The Mathematics Genealogy Project, las páginas de la Fundación Abel y las del Clay Mathematics Institute. Algunos párrafos están adaptados de mis escritos para el blog antes mencionado, para el diario de Oviedo *La Nueva España*[27] o para el *Boletín*[28] *de la RSME*.

El autor agradece el continuo interés de la RSME y el apoyo de un número de colaboradores que han aportado datos, sugerencias y correcciones.

[25] `https://www.investigacionyciencia.es/blogs/matematicas/75/posts`.

[26] El primero fue Walter Littman (en 1956), a quien tanto traté en Minnesota.

[27] `https://www.lne.es/sociedad/2020/01/28/muere-louis-nirenberg-genio-matematicas/2590290.html`.

[28] `https://www.rsme.es/wp-content/uploads/2020/01/Boletin653.pdf`.

REFERENCIAS

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS Y L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 623–727.

[2] S. AGMON, A. DOUGLIS Y L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II, *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964), 35–92.

[3] T. AUBIN, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *J. Differential Geom.* **11** (1976), no. 4, 573–598.

[4] H. BERESTYCKI Y L. NIRENBERG, On the method of moving planes and the sliding method, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **22** (1991), no. 1, 1–37.

[5] H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG Y S. R. S. VARADHAN, The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains, *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), no. 1, 47–92.

[6] A. BLANCHET, M. BONFORTE, J. DOLBEAULT, G. GRILLO Y J. L. VÁZQUEZ, Asymptotics of the fast diffusion equation via entropy estimates, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **191** (2009), no. 2, 347–385.

[7] H. BREZIS, *Analyse fonctionelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.

[8] H. BREZIS Y P. MIRONESCU, Gagliardo-Nirenberg inequalities and noninequalities: the full story, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **35** (2018), no. 5, 1355–1376.

[9] H. BREZIS Y L. NIRENBERG, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), no. 4, 437–477.

[10] H. BREZIS Y L. NIRENBERG, Remarks on finding critical points, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), no. 8-9, 939–963.

[11] H. BREZIS Y L. NIRENBERG, H^1 versus C^1 local minimizers, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **317** (1993), no. 5, 465–472.

[12] X. CABRÉ, 2015 Abel Prize, *SCM Not.* **38** (2015), 75-–80.

[13] X. CABRÉ, Isoperimetric, Sobolev, and eigenvalue inequalities via the Alexandroff-Bakelman-Pucci method: a survey, *Chin. Ann. Math. Ser. B* **38** (2017), no. 1, 201—214.

[14] L. A. CAFFARELLI Y X. CABRÉ, *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications **43**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[15] L. CAFFARELLI, R. KOHN Y L. NIRENBERG, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), no. 6, 771–831.

[16] L. CAFFARELLI, R. KOHN Y L. NIRENBERG, First order interpolation inequalities with weights, *Compositio Math.* **53** (1984), no. 3, 259–275.

[17] L. Caffarelli, L. Nirenberg y J. Spruck, The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), no. 3, 369–402.

[18] L. Caffarelli y S. Salsa, *A geometric approach to free boundary problems*, Graduate Studies in Mathematics **68**, American Mathematical Society, 2005.

[19] J. A. Carrillo, M. del Pino, A. Figalli, G. Mingione y J. L. Vázquez, *Nonlocal and nonlinear diffusions and interactions: new methods and directions* (Lectures from the CIME Course held in Cetraro, July 4–8, 2016, M. Bonforte y G. Grillo, Eds.), Lecture Notes in Mathematics **2186**, Springer y Fondazione C.I.M.E., 2017.

[20] S.-Y. A. Chang, C.-S. Li y H.-T. Yau, *Lectures on partial differential equations: proceedings in honor of Louis Nirenberg's 75th birthday*, International Press of Boston, 2003.

[21] P. Constantin, Euler and Navier-Stokes equations, *Publ. Mat.* **52** (2008), no. 2, 235–265.

[22] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret y C. Villani, A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities, *Adv. Math.* **182** (2004), no. 2, 307–332.

[23] M. del Pino y J. Dolbeault, Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions, *J. Math. Pures Appl.* **81** (2002), no. 9, 847–875.

[24] F. del Teso, D. Gómez-Castro y J. L. Vázquez, Estimates on translations and Taylor expansions in fractional Sobolev spaces, *arXiv:2004.12196*.

[25] E. Di Nezza, G. Palatucci y E. Valdinoci, Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, *Bull. Sci. Math.* **136** (2012), no. 5, 521–573.

[26] J. I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Vol. I. Elliptic equations*, Research Notes in Mathematics **106**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[27] S. Donaldson, On the Work of Louis Nirenberg, *Notices Amer. Math. Soc.* **58** (2011), no. 3, 469–472.

[28] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics **19**, American Mathematical Society, 1998.

[29] C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 587–588.

[30] A. Figalli, *The Monge-Ampère equation and its applications*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society, 2017.

[31] A. Friedman, *Variational principles and free-boundary problems*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1982.

[32] E. Gagliardo, Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, *Ricerche Mat.* **8** (1959), 24–51.

[33] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Steady-state problems* (2.ª ed.), Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2011.

[34] B. Gidas, W. M. Ni y L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), no. 3, 209–243.

[35] B. Gidas, W. M. Ni y L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations, in $\mathbb{R}^n$, *Mathematical analysis and applications, Part A*, 369–402, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, 1981.

[36] D. Gilbarg y N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1977.

[37] C. E. Gutiérrez, *The Monge-Ampère equation* (2.ª ed.), Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **89**, Birkhäuser/Springer, 2016.

[38] G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Pólya, *Inequalities*, reimpresión de la edición de 1952, Cambridge University Press, 1988.

[39] A. Jackson, Interview with Louis Nirenberg, *Notices Amer. Math. Soc.* **49** (2002), no. 4, 441–449.

[40] F. John y L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 415–426.

[41] D. Kinderlehrer y L. Nirenberg, Regularity in free boundary problems, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) **4** (1977), no. 2, 373–391.

[42] D. Kinderlehrer y L. Nirenberg, The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), no. 3, 257–282.

[43] D. Kinderlehrer y G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure and Applied Mathematics **88**, Academic Press, 1980.

[44] J. J. Kohn y L. Nirenberg, An algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965), 269–305.

[45] J. Leray, Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *Jour. Math. Pures Appl.* **13** (1934), 331–418.

[46] J. Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide emplissant l'espace, *Acta Math.* **63** (1934), 193–248.

[47] Y. Y. Li, The work of Louis Nirenberg, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010*, Vol. I, 127–137, Hindustan Book Agency, 2010.

[48] E. H. Lieb, *Inequalities. Selecta of Elliott H. Lieb*, editado por M. Loss y M. B. Ruskai, Springer, 2002.

[49] F. H. Lin, A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem, *Comm. Pure Appl. Math.* **51** (1998), 241–257.

[50] C. Loewner y L. Nirenberg, Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, 245–272, Academic Press, 1974.

[51] A. Newlander y L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. of Math. (2)* **65** (1957), 391–404.

[52] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* **13** (1959), 115–162.

[53] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Lecture Notes, 1973-1974, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1974.

[54] L. Nirenberg (Ed.), *Pseudo-differential operators* (Lectures from the CIME Summer School held in Stresa, August 26–September 3, 1968), reimpresión del original de 1969, Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) Summer Schools **47**, Springer y Fondazione C.I.M.E., 2010.

[55] L. Nirenberg, *Lectures on differential equations and differential geometry*, Classical Topics in Mathematics **7**, Higher Education Press, 2018.

[56] B. Perthame, F. Quirós y J. L. Vázquez, The Hele-Shaw asymptotics for mechanical models of tumor growth, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **212** (2014), no. 1, 93–127.

[57] A. Petrosyan, H. Shahgholian y N. Uraltseva, *Regularity of free boundaries in obstacle-type problems*, Graduate Studies in Mathematics **136**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[58] T. Rivière, Exploring the unknown: the work of Louis Nirenberg on partial differential equations, *Notices Amer. Math. Soc.* **63** (2016), no. 2, 120–125.

[59] J. C. Robinson, J. L. Rodrigo y W. Sadowski, *The three-dimensional Navier-Stokes equations. Classical theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **157**, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[60] G. Seregin, *Lecture notes on regularity theory for the Navier-Stokes equations*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2015.

[61] S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, *Amer. Math. Soc. Translations (2)* **34** (1963), 39–68; traducción del original publicado en ruso en *Math. Sb. (N.S.)* **4** (1938), no. 46, 471–497.

[62] G. Steiner, *Lecciones de los maestros*, Siruela, 2004.

[63] G. Talenti, Best constants in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **110** (1976), 353–372.

[64] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Studies in Mathematics and its Applications **2**, North-Holland Publishing, 1977.

[65] J. L. Vázquez, A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations, *Appl. Math. Optim.* **12** (1984), no. 3, 191–202.

[66] J. L. Vázquez, *Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations. Equations of porous medium type*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications **33**, Oxford University Press, 2006.

Juan Luis Vázquez, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid y Real Academia Española de Ciencias

Correo electrónico: `juanluis.vazquez@uam.es`

Página web: `http://verso.mat.uam.es/~juanluis.vazquez/`