Luis Caffarelli, Premio Abel de las Matemáticas 2023

El matemático argentino, experto en las ecuaciones diferenciales de la física, muy ligado a España.

La Academia Noruega de Ciencias y Letras ha otorgado el **Premio Abel** de 2023 a **Luis Ángel Caffarelli**, profesor de la Universidad de Texas en Austin, EE. UU. El premio es considerado como el equivalente matemático de los Premios Nobel de la Academia Sueca y se otorga desde 2003 a personas que hayan hecho contribuciones sobresalientes a las Matemáticas (literalmente, *"outstanding scientific work in the field of Mathematics").* La citación de este año a la obra de Caffarelli dice en concreto: "*por sus contribuciones seminales a la teoría de la regularidad para ecuaciones en derivadas parciales no lineales, en particular en los problemas de frontera libre y la ecuación de Monge-Ampère".* Pero sus contribuciones no se limitan a los campos ya mencionados, sino que incluyen problemas de mecánica de fluidos, transporte óptimo, operadores no locales y otros múltiples temas con importantes conexiones con otras ciencias. Además, su trabajo sobre la regularidad de las **fronteras libres** ha abierto notables vías de influencia de los métodos geométricos en el análisis de ecuaciones. Los problemas de frontera libre aparecen de forma natural en contextos muy distintos, desde la filtración de fluidos, la elasticidad, estrategias óptimas en finanzas, industria metalúrgica, estudio de sistemas de partículas en interacción en física, economía, biología y ecología. Como destacó el matemático noruego Helge Holden, presidente del comité Abel: *"Luis combinó su brillante conocimiento geométrico con ingeniosas herramientas analíticas*" para abrir un camino pionero en un campo de las matemáticas, que hace cuatro décadas estaba apenas explorado. Y, más adelante, Holden añadía: *"Los teoremas de Caffarelli han cambiado radicalmente nuestra comprensión de varias clases de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que tienen amplias aplicaciones. Sus resultados son técnicamente virtuosos y cubren muchas áreas diferentes de las matemáticas y sus aplicaciones".*

Fig 1. Luis Caffarelli, foto reciente de la Universidad de Texas

Fig 2. Luis Caffarelli recibe el Premio Abel de manos del Rey Harald de Noruega

Biografía

Luis Caffarelli nació en 1948 en Buenos Aires, Argentina, se graduó en Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, donde también cursó la mitad de la carrera de Física. Se doctoró en 1972 y reside en EE.UU. desde 1973. Sus primeros años americanos transcurrieron en Minnesota, lejano y hermoso estado del Medio Oeste de clima extremo y ciencia muy brillante en el siglo XX. La Universidad de Minnesota trae excelentes recuerdos a muchos científicos españoles de la generación que comenzó su carrera investigadora en los años 70, especialmente expertos en economía, medicina y matemáticas.

Luis saltó a la fama al final de esa década por sus sorprendentes trabajos sobre la regularidad de las llamadas "fronteras libres", conocidas hoy día por un amplio público en buena parte gracias a su obra. Veremos más adelante una breve descripción de estos conceptos. De hecho, Luis sorprendió a todo el mundo con el artículo "*The regularity of free boundaries in higher dimensions",* aparecido en 1977 en una revista del máximo prestigio, *Acta Mathematica*. Es una obra muy notable que fue la base de su fama futura. Su novedad y brillantez en el tratamiento del **Problema de Obstáculo** son ya una referencia clásica en las matemáticas puras y aplicadas, ejemplo paradigmático de lo que llamamos **problemas de frontera libre**. También es necesario resaltar sus aportaciones al **Problema de Stefan**, que describe matemáticamente transiciones de fase sólido-líquido; modela entre otras aplicaciones la evolución del sistema hielo-agua con su fina interfase de separación, tema de aplicación que llega al gran público a través del proceso de derretimiento de los glaciares o de los cubitos de hielo en el agua.

Un segundo trabajo de Luis con gran impacto llegó en 1982, fruto de una colaboración con Robert Kohn y Louis Nirenberg, titulado "*Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equation",* aparecido en la revista *Communications on Pure and Applied Mathematics* en 1982. El trabajo fue realizado durante su primer período como profesor en el Instituto Courant de Ciencias Matemáticas en Nueva York, uno de los grandes centros de la investigación en matemáticas aplicadas en el mundo. **Louis Nirenberg**, también Premio Abel (en 2015), fue su valedor en esos años y su amigo para toda la vida. Pasan los años y este hermoso resultado, el teorema conocido como CKN en honor a sus autores, sigue destacando como la última gran contribución habida en el estudio de la regularidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para los fluidos viscosos, que es uno de los famosos siete "*Millenium Prize Problems"* del Clay Mathematics Institute. Citamos en especial estos dos trabajos porque la obra de los grandes matemáticos va unida a artículos selectos, conteniendo resultados trascendentales, o a libros con profundas teorías.

Los años 80 fueron una época prodigiosa para Luis. Una cascada de artículos con diversos colaboradores le consagró como el mejor representante mundial del legado de **David Hilbert** (hacia 1900) y **Ennio de Giorgi** (hacia 1960) sobre "cómo estudiar la regularidad inherente a las soluciones de los problemas del cálculo de variaciones". Luis añadía al programa del gran Ennio el estudio de los problemas de frontera libre que trataremos en 2.A, los cuales habían traído de cabeza a los mejores expertos durante la década de los 60 y 70 por su intrincada combinación de dificultades de Análisis y Geometría.

Luis es uno de los máximos expertos mundiales en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Desde 1986 a 1996 fue profesor permanente del **IAS**, Institute for Advanced Study, de Princeton, famoso por figuras legendarias precedentes como A. Einstein, J. von Neumann y R. Oppenheimer. Luis fue luego profesor del Courant Institute de Ciencias Matemáticas en Nueva York, para trasladarse finalmente en 1997 a la Universidad de Texas en Austin donde aún es profesor. El reconocimiento social ha sido continuo y creciente. Desde 1991 es un referente científico en EE.UU. y miembro de la National Academy of Sciences. Además, una serie de premios relevantes muestran el impacto de sus aportaciones científicas: en el presente siglo se cuentan el Rolf Schock Prize, de la Real Academia Sueca de Ciencias (2005); el Leroy P. Steele Prize "for Lifetime Achievement" de la Sociedad Matemática Americana (AMS, 2009); el muy prestigioso Wolf Prize in Mathematics (2012); la Solomon Lefschetz Medal, del Mathematical Congress of the Americas (2013); de nuevo, otro Leroy P. Steele Prize, esta vez “for Seminal Contribution to Research” por el artículo histórico publicado en 1982 con Robert Kohn y Louis Nirenberg, AMS (2014); así como el Shaw Prize in Mathematics, el considerado “Premio Nobel asiático” (2018). Se mostrará una breve pincelada de sus mayores éxitos científicos en la siguiente sección.

Detalles de su obra matemática

La obra científica de Caffarelli se ha desarrollado en el campo matemático de **las ecuaciones en derivadas parciales no lineales**, pero hay que destacar el interés que Luis siempre mostró por estas conexiones con otras ciencias desde sus estudios predoctorales. Reproducimos a continuación algunos fragmentos de la mención del Premio Abel 2023: *“Las ecuaciones en derivadas parciales surgen naturalmente como leyes de la naturaleza, desde la descripción del flujo de agua al crecimiento de las poblaciones. Estas ecuaciones han sido objeto constante de intenso estudio desde los días de Newton y Leibniz. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos sustanciales de los matemáticos durante siglos, las cuestiones fundamentales relacionadas con la estabilidad o incluso la unicidad y la aparición de singularidades, siguen sin resolverse para algunas ecuaciones clave. A lo largo de más de 40 años, Luis Caffarelli ha realizado contribuciones pioneras para descartar o caracterizar singularidades. Esto se conoce con el nombre de teoría de la regularidad y captura características cualitativas clave de las soluciones, más allá de la configuración analítica funcional original.”*

La cita toca dos grandes temas. El primero son las ecuaciones diferenciales, que aparecen como el gran motor para describir el movimiento de los cuerpos y la variación de las figuras geométricas, así como sus estados de equilibrio. Estas ecuaciones fueron inventadas como parte del Cálculo Diferencial en el siglo XVII. En ellas se relacionan determinadas magnitudes (llamadas variables del sistema) con la tasa de variación relativa de estas (es decir, con sus derivadas). Cuando las variables incógnitas dependen de varias coordenadas de espacio y/o tiempo, las ecuaciones resultantes se llaman “ecuaciones en derivadas parciales”. Por brevedad, usaremos en adelante la sigla EDP para designar a tales ecuaciones.

Desde hace más de dos siglos el número de tales ecuaciones con importancia en las matemáticas, la física y la ingeniería no ha dejado de crecer. Hoy día es quizá la rama más activa de las matemáticas, y vive uno de sus momentos dorados por la enorme influencia de sus resultados y técnicas en las más diversas aplicaciones. Las ecuaciones en derivadas parciales se utilizan para describir matemáticamente los procesos que se dan en la naturaleza y en el ámbito de las tecnologías. Las ecuaciones fundamentales de la Física describen fenómenos como las ondas y vibraciones, los fluidos, el comportamiento de estructuras, el electromagnetismo, las bases de la mecánica cuántica. En temas más cercanos a la vida diaria hallamos la propagación de fenómenos naturales, como son incendios o tsunamis, o la dinámica de especies invasoras, o la evolución de una enfermedad o pandemia en una población. Mencionemos como grandes hitos conocidos del público las ecuaciones de Euler para los fluidos, de Maxwell para el electromagnetismo, de Einstein para la gravitación, las de Schrödinger y Dirac para la mecánica cuántica, etc. Dentro de las mismas matemáticas, tienen profundas conexiones con otros campos como el cálculo de variaciones, la geometría diferencial, el análisis armónico, la teoría de probabilidad, la teoría geométrica de la medida, o la matemática computacional.

Además, las EDPs en que Luis Caffarelli destacó son del tipo llamado “no lineal”. Examinemos la cuestión. Aunque la Naturaleza ha tenido el buen gusto de recurrir a procesos lineales para muchos de sus modelos básicos, como la transmisión de ondas o del calor y también las ecuaciones de la teoría cuántica, hoy se sabe bien que muchos de los procesos más importantes de la ciencia son no lineales, y comprender esa dificultad añadida es la gloria y la cruz de la profesión matemática actual. En efecto, muchos fenómenos naturales, desde el movimiento de los fluidos hasta las transiciones de fase, desde la forma del espacio-tiempo hasta el comportamiento de las acciones en bolsa, no obedecen realmente a un principio de superposición de efectos y algunas de sus "características clave" (como, por ejemplo, la turbulencia en fluidos) son claramente el resultado del carácter "no lineal" de alguna EDP subyacente. Estas características, clave a menudo, se presentan como "singularidades" donde las ecuaciones usadas dejan de tener validez. Además, no hay manera de evitar el problema, pues tales singularidades son inherentes al problema y es el matemático quien debe comprenderlas y explicar al científico o ingeniero de qué modo enfrentarlas. Las singularidades no son un engorro pasajero, al contrario, contienen información importante.

En el mundo de los problemas no lineales no rige el **Principio de Superposición**, que es un instrumento básico en la ciencia lineal. Brevemente resumido, en un sistema lineal la respuesta correspondiente a la suma de dos datos (sean funciones de entrada o fuerzas externas) es la suma de las respuestas obtenidas con los datos de las diferentes partes por separado. Así sucede por ejemplo en el mundo del análisis de Fourier. Sin embargo, en un sistema no lineal la respuesta correspondiente a la suma de dos datos no es la suma de las respuestas obtenidas con los datos por separado. El problema con datos generales no se puede reducir pues a suma de soluciones de ciertos bloques básicos. Los gráficos típicos del análisis no lineal no son superficies planas o líneas rectas, sino que involucran curvas y superficies más arbitrarias.

Afirmamos con satisfacción que las matemáticas de finales del siglo XX han sido excelentes en el estudio de esos procesos no lineales, que representan un estadio de dificultad superior al estudio de los procesos lineales. La no linealidad es una fuente infinita de complejidad y es origen de multitud de teorías de gran novedad. El caos, las ondas de choque y los agujeros negros son objetos relevantes producidos por los mundos no lineales.

Los teoremas de Caffarelli han cambiado radicalmente nuestra comprensión de una amplia clase de ecuaciones en derivadas parciales no lineales con amplias aplicaciones. Sus resultados van al meollo de la cuestión, sus técnicas muestran al mismo tiempo virtuosismo y sencillez, y cubren muy diferentes áreas de las matemáticas y sus aplicaciones. La unión de la geometría y la física alrededor del análisis de las ecuaciones produce páginas de gran belleza.

Describimos a continuación las principales contribuciones matemáticas de Luis Caffarelli con más detalle. El lector menos experto puede saltar a la sección 3, al menos en una primera lectura.

A. Teoría de regularidad para problemas de frontera libre

Una gran parte del trabajo de Caffarelli se refiere a la cuestión de la regularidad de los llamados problemas de frontera libre. Estos problemas se dan tanto en procesos estacionarios como en procesos de evolución. “Regular” se refiere a las funciones que aparecen como datos o soluciones y quiere decir en este contexto que tales funciones poseen tantas derivadas como se requieran para poder satisfacer las ecuaciones en que intervienen. El problema se plantea porque los procedimientos de solución suelen recurrir a métodos aproximados o numéricos, tras lo cual se pasa al límite para obtener la función que es candidata a solución. Pero ¿es esta presunta solución suficientemente derivable, es decir, suficientemente **regular**? Esa es una dificultad esencial que aborda decididamente Caffarelli y a la cual contribuyó durante largos años. En esta área las aplicaciones son múltiples y, como es típico en el método de análisis de las matemáticas puras, hay ciertos problemas básicos donde se examinan las dificultades esenciales, que tienen enunciados simples y dificultades grandes.

-"Problema de Obstáculo". Es el ejemplo paradigmático del tipo estacionario.

Imaginemos que nos interesa determinar la posición de una membrana elástica que está sometida a distintas fuerzas y sujeta a unas determinadas condiciones en la frontera o borde que la limita. Según las leyes de la elasticidad, la posición de equilibrio de la membrana viene descrita por una ecuación de estado que en el caso más sencillo es

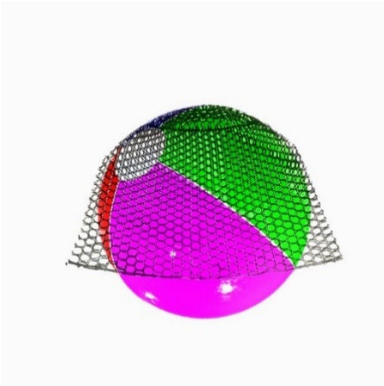
$$\Delta u + f = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad \text{(E)}$$

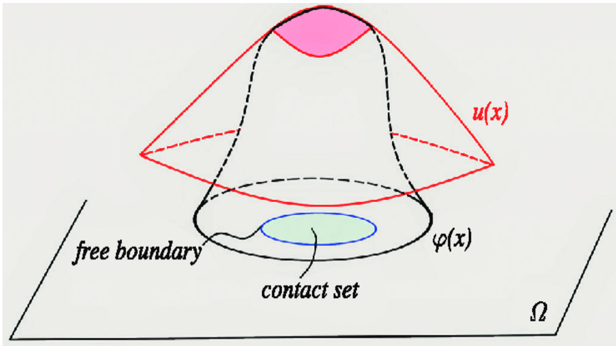
donde $z = u(x; y)$ representa la posición vertical de la membrana sobre un dominio del plano Ω y f representa las posibles fuerzas actuando sobre la membrana. Si la función $z = g(x; y)$ representa las condiciones de sujeción impuestas sobre la frontera (las llamadas "condiciones de contorno", CC), es bien conocido en la teoría de EDPs que la ecuación (E) junto con las condiciones de contorno permiten obtener una solución única del problema. Además, si f es bastante regular entonces u también lo es, aunque las condiciones de contorno no lo sean. Estas afirmaciones han sido probadas en la primera mitad del siglo XX y eran bien conocidas y estudiadas años antes.

El problema de obstáculo surge cuando bajo la membrana elástica se sitúa un "obstáculo" y consideramos cómo cambia el análisis anterior cuando hay puntos en el interior de la membrana (no en los bordes) en que ésta toca al obstáculo. Surge entonces una situación en que el dominio se divide en dos partes: un *conjunto de contacto* en el que la membrana se apoya sobre el obstáculo y el resto en que la posición de la membrana se sitúa por encima del obstáculo. En este último caso, en ese *conjunto de no contacto* se deben satisfacer las ecuaciones de la elasticidad por lo que se prueba que la ecuación de estado (E) es válida. En el mejor de los casos existe una línea clara de separación entre ambos conjuntos. Es la *frontera libre*, FL, llamada así porque no es conocida a priori, es preciso calcularla como parte de la resolución del problema. El problema completo es en este caso más complicado: se trata de hallar dos objetos relacionados:

1) hallar el conjunto que representa la parte de la membrana que no se apoya en el obstáculo, y

2) resolver el problema de contorno anterior (pero ahora solo en el dominio donde no hay contacto) para hallar la posición de la membrana (pues en el resto la membrana coincide con el obstáculo). Este es el Problema de Obstáculo (PO). Resumiendo, el PO es un problema típico de Frontera Libre. Su resolución exige combinar el análisis de ecuaciones con la geometría diferencial.





Figs. 3 y 4. Membrana sobre un obstáculo.

Tal combinación es lo que constituye la dificultad del PO, que ocupó a las mejores mentes de la especialidad en los años 1960 y 70. En 1977 Caffarelli sorprendió a todos con el ya mencionado artículo en *Acta Mathematica,* donde estableció que las soluciones poco regulares (llamadas débiles) del PO obtenidas por métodos funcionales (por ejemplo minimizando la energía del sistema) son en realidad funciones regulares lejos de la frontera libre si el obstáculo y las fuerzas cumplen unas condiciones mínimas. Y eso sucede no solo en dos dimensiones espaciales, sino también en todas las dimensiones de espacio. Además, se demuestra que las fronteras libres son (hiper)superficies regulares salvo un posible "conjunto excepcional" de puntos singulares que son muy poco frecuentes (técnicamente, su conjunto es de medida geométrica baja). Estas singularidades no son hipotéticas, se dan en la práctica. Se establece así la dualidad: *regularidad genérica* versus *singularidad excepcional,* la cual ha iluminado la investigación matemática en temas afines desde entonces. La regularidad hallada es del tipo llamado técnicamente "continuidad Hölderiana" y este fue el campo de excelencia de Luis Caffarelli. Ver detalles de la teoría en: L. Caffarelli. *The obstacle problem revisited*, *Journal of Fourier Analysis and Applications* (1998).

El resultado que describimos utilizaba métodos muy novedosos que permitieron a Caffarelli brindar en años sucesivos soluciones penetrantes a toda una serie de problemas estacionarios con aplicaciones a interfaces sólido-líquido, flujos de chorro y cavitación, y flujos de gas y líquido en medios porosos, así como matemáticas financieras. Los resultados de regularidad de Caffarelli se basan en ampliar sucesivamente la zona próxima a la frontera libre (proceso llamado *blow-up*) y clasificar las ampliaciones resultantes, donde las ampliaciones no genéricas corresponden a las singularidades de la frontera libre, excepciones a la regularidad que pueden darse, pero tienen dimensión menor.

-**"Problema de Stefan" (PS)**. Como ejemplo más típico de problema evolutivo con una frontera "libre" a determinar se considera el problema del hielo que se derrite en agua, llamado "Problema de Stefan" en honor al gran físico-matemático Josef Stefan. Se trata de un problema de los llamados de transición de fase. Aquí la frontera libre es la interfaz entre dos fases de un medio, el agua y el hielo. Esa interfaz es otra incógnita del problema, es decir parte de lo desconocido que ha de ser determinado y cuya localización es de hecho el resultado más interesante.

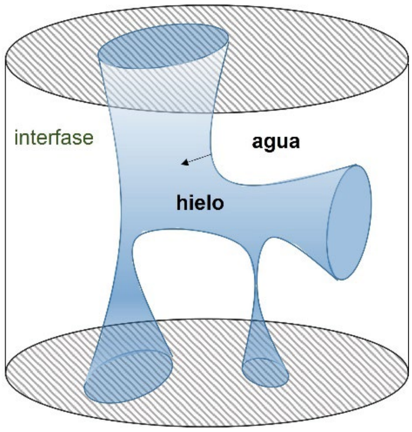


Fig 5. Sistema agua-hielo y su frontera de separación.

Al ser esa interfaz una frontera libre móvil con el tiempo, se la puede denominar más precisamente “frontera libre móvil”. El PS es el problema tipo en la descripción matemática de las **transiciones de fase**, con aplicaciones que incluyen la ecología, las finanzas y la industria entre muchas otras.

-**Ecuación de los medios porosos**, EMP. Otro ejemplo muy conocido hoy día lo proporciona el problema de evolución correspondiente al estudio del flujo de agua que se filtra a través de un medio poroso. De nuevo, se debe hallar la interfaz entre la parte saturada y la no saturada del medio. La ecuación aparece en los gases compresibles siguiendo la ley de Darcy, y se aplica en yacimientos de hidrocarburos. Como parte del problema hay una frontera libre móvil cuya situación se debe calcular (de interés en ingeniería) y cuya regularidad como superficie geométrica se debe establecer (de interés en matemáticas). Este problema es el comienzo de una amplia teoría de difusiones degeneradas en que Caffarelli fue figura dominante.

Citemos para terminar esta sección los problemas de flujos en chorro y en cavidades y el problema del dique que famoso en los años 60 y 70.

B. La regularidad de los fluidos viscosos, ecuaciones de Navier y Stokes

Hemos dicho que en 2014 la Sociedad Americana de Matemáticas (AMS) concedió el Premio Leroy P. Steele, una de las más altas distinciones en matemáticas, a Luis Caffarelli junto con Robert Kohn y Louis Nirenberg. Lo hizo por su “contribución seminal a la Investigación”, siendo honrados por su artículo de 1982 en *Communications* antes mencionado sobre la regularidad o posible singularidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes que rigen el movimiento de los fluidos. Dice la mención: “Este artículo fue y sigue siendo un hito en la comprensión del comportamiento de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y ha sido una fuente de inspiración para una generación de matemáticos”.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son fundamentales para la comprensión matemática de la dinámica de fluidos y son uno de los siete *Millenium Prize Problems* del Clay Mathematics Institute. El trabajo de Caffarelli-Kohn-Nirenberg aborda el tema de la posible aparición de singularidades. Es decir, se trata de decidir si a partir de unos datos iniciales muy regulares el fluido incompresible viscoso evolucionará (de acuerdo con las ecuaciones de Navier-Stokes) en forma de una solución que sigue siendo regular con el paso del tiempo, o bien si pueden aparecer algunas singularidades que responderían a formas enrevesadas características de los *flujos* *turbulentos*, tal como a veces vemos en la atmósfera o en los procesos de combustión. Esta posibilidad abriría prometedoras vías de progreso a la teoría de la turbulencia.

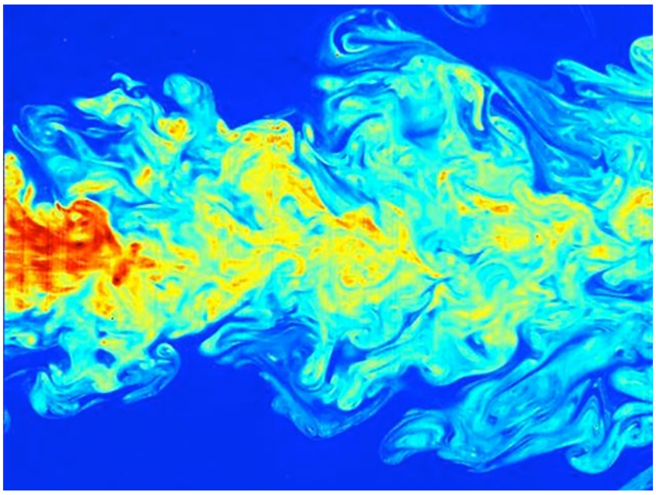


Fig. 6. Ejemplo de fluido turbulento

El resultado CKN es un resultado de **regularidad parcial**: afirma que cabe aún la posibilidad de que aparezcan singularidades al cabo de un tiempo, pero en todo caso el conjunto de los puntos singulares en el espacio-tiempo es muy fino o poco denso (técnicamente, es de medida geométrica muy baja), en particular no puede contener ninguna curva. La posible turbulencia singular de Navier-Stokes sería pues de naturaleza excepcional, si es que se da. El resultado fue un gran avance en la comprensión de estas ecuaciones y ha motivado muchos desarrollos y simplificaciones posteriores. Pero los avances realizados desde 1982 hasta hoy no tienen en absoluto la entidad del resultado de CKN. El problema de regularidad total está aún abierto.

C. Problemas completamente no lineales. Ecuación de Monge Ampère. Transporte óptimo

Los teoremas de regularidad de Caffarelli de la década de 1990 representaron un gran avance en nuestra comprensión en una tercera dirección, de nuevo muy distinta de las anteriores. Se trata de la **ecuación de Monge-Ampère**, una ecuación en derivadas parciales que es altamente no lineal y se utiliza por ejemplo para construir superficies de curvatura gaussiana dada. El gran matemático ruso Pável Alexandrov estableció importantes resultados de existencia. Caffarelli, en colaboración con Louis Nirenberg y Joel Spruck, estableció propiedades esenciales de las soluciones, con notables contribuciones adicionales de L. C. Evans y N. V. Krylov. Más tarde, Caffarelli cerró la brecha en nuestra comprensión de las singularidades al demostrar que los ejemplos explícitamente conocidos de soluciones singulares son los únicos.

A partir de la ecuación de Monge-Ampère, Caffarelli dedicó varias obras al estudio de la clase de ecuaciones llamadas completamente no lineales. Su libro en colaboración con X. Cabré: *Fully nonlinear elliptic equations*, AMS Colloquium Publications (1995) es una referencia obligada en este tema.

Caffarelli, junto con sus colaboradores, ha aplicado estos resultados al problema de “transporte óptimo de masa” de Monge-Kantorovich, basándose en trabajos anteriores de Yann Brenier. Su conocimiento de las ecuaciones de Monge-Ampère le permitió aportar contribuciones fundamentales.

D. Operadores integro-diferenciales, procesos no locales

Desde el comienzo de siglo se ha notado un enorme interés en los mundos que se ocupan de las interacciones entre partículas o poblaciones, o en el mundo de la información, por reflejar las acciones a distancia, que tienen efectos notables lejos del origen de la señal, y que, en particular, no siguen los conocidos patrones de decaimiento de tipo browniano. La forma canónica de estas interacciones es lo que se conoce como procesos de Lévy en probabilidad y como "operadores laplacianos fraccionarios" en Análisis Matemático y EDPs. El crecimiento de esta teoría en EDPs ha sido espectacular en los últimos 15 años. Una referencia fundamental en el análisis matemático del área es el artículo de Luis Caffarelli y Luis Silvestre: *An extension problem related to the fractional Laplacian*. Aparecido en *Comm. Partial Differential Equations* en 2007, anunciaba una nueva época en la investigación en ecuaciones difusivas, y se ha convertido en estos años en referencia para los estudiosos del área. Las aplicaciones del cálculo fraccionario son hoy día variadas y numerosas: citemos flujos cuasi-geostróficos, turbulencia, dinámica molecular, mecánica cuántica relativista estelar, así como varias aplicaciones en probabilidad y finanzas.

En un ejemplo paradigmático, Luis Caffarelli y Alexis Vasseur obtuvieron resultados profundos de regularidad para la **ecuación cuasi-geostrófica,** un modelo con aplicación a la teoría de los fluidos. En su artículo: *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation*, aparecido en Annals of Mathematics en 2010, Caffarelli y Vasseur demuestran la ausencia total de singularidades en este modelo. Este resultado tiene relación con la posible existencia de singularidades en el problema de Navier-Stokes.

En otra dirección, las ideas clásicas de **superficie mínima y de perímetro** de un sólido han sido extendidas con éxito al contexto de las interacciones a distancia gracias a Luis Caffarelli y sus colaboradores, como J. M. Roquejoffre, O. Savin y E. Valdinoci. Estas líneas de investigación están llamadas a tener gran futuro y reflejan la profunda interacción de la geometría y la física en la mente de Caffarelli.

Por último, la combinación de las ideas no lineales de difusión de las últimas décadas con las interacciones no locales ha dado lugar a las teorías de **"difusión no lineal y no local"** que han sido desarrolladas en los últimos años, en particular en proyectos con España en una serie de aplicaciones influyentes, y están siendo usadas en la modelización matemática de procesos en diversas ciencias. Ejemplo de esta vitalidad es, entre otros, el nuevo libro sobre el tema: *Integro-Differential Elliptic Equations,* anunciado este mismo año (2023) por Xavier Fernández-Real y Xavier Ros-Oton.

E. Varios. Coda

Además, Caffarelli ha realizado contribuciones sobresalientes a la teoría de la **homogenización,** donde se busca caracterizar el comportamiento efectivo o macroscópico de medios que tienen una microestructura, por ejemplo, porque están formados por un material compuesto. Un problema típico se refiere a un medio poroso, como un yacimiento de hidrocarburos, donde se tiene una roca sólida con poros, que presenta una estructura compleja y en gran medida desconocida, a través de la cual fluyen los fluidos.

Caffarelli es un matemático excepcionalmente prolífico: ha escrito más de 320 artículos matemáticos en las mejores revistas con más de 130 colaboradores, desde los más ilustres a los jóvenes brillantes en busca de un futuro matemático. Ha tenido más de 30 estudiantes de doctorado durante un período de casi 5 décadas y cuenta con más de 150 descendientes.

Combinando una visión geométrica brillante con herramientas y métodos analíticos ingeniosos, ha tenido y continúa teniendo un enorme impacto en el campo. En su discurso pronunciado en Oslo el pasado mayo, el Profesor Jan Philip Solovej, presidente de la Sociedad Matemática Europea, EMS, recordaba la impresión que le causó de joven la lectura de los artículos de Luis*:* *"... there was this beautiful idea of controlling or taming the scary difficulties by intuitive geometric ideas of shapes. Taming difficulties is what Mathematics is often about, and Prof. Caffarelli has, more than anyone else, mastered the art of taming irregularities."*

Junto a todo lo anterior está la proverbial hospitalidad y la merecida fama de ser un gran cocinero, en la tradición argentino-italiana.

Luis Caffarelli en España

Luis Caffarelli ha tenido una enorme influencia en el desarrollo de las ecuaciones en derivadas parciales en varios países, principalmente EE. UU., Argentina, España, Italia, Grecia, Corea y China (por hacer breve la lista). Su colaboración con autores españoles data del decenio 1980-90. Tras conocerle en un congreso de fronteras libres en Italia en el verano de 1981, Juan Luis Vázquez hizo largas estancias en Minnesota, donde entonces era profesor Luis Caffarelli, y el contacto científico se concretó con sus visitas regulares a España. Las colaboraciones realizadas desde esos años incluyen un buen número de coautores españoles, en particular Xavier Cabré (con quien escribió en 1995 un libro famoso, ya mencionado), Antonio Córdoba, Ireneo Peral, Rafael de la Llave, Fernando Soria, María del Mar González y Juan Luis Vázquez, entre otros. Estas colaboraciones con autores españoles versan sobre problemas de regularidad de ecuaciones altamente no lineales y los problemas de cambio de fase y fronteras libres, temas en los que su liderazgo es incontestado. De hecho, Juan Luis Vázquez, coautor durante muchos años de Luis, le dedicó su libro más conocido: *The Porous Medium Equation, Oxford Univ. Press, 2007*, debido a las muchas páginas que recogen ideas del maestro.

Fig7. Luis Caffarelli en el Curso de verano en la UIMP en 1990.

Luis ha participado en numerosos cursos y escuelas en España, muy en particular en los Cursos de Verano de la UIMP que junto con él organizamos en el incomparable marco del Palacio de la Magdalena de Santander, cursos que Luis inspiró y que copatrocinó la UAM, universidad que visitó con cierta frecuencia desde 1986 a 2017. Estos cursos contaron con el apoyo decidido del rector Ernest Lluch, eximio protector de las ciencias en la UIMP y amigo de Luis. La decidida orientación internacional respondía a las ideas de Luis, pero somos testigos de que no era fácil de implementar con las reglas existentes. Señalemos que la serie de escuelas de los años 80 y 90 siguió bajo el rector Salvador Ordóñez entre 2010 y 2015. Pero no hemos de olvidar sus fuertes lazos con Barcelona y Granada, por ejemplo. En los últimos años Luis ha estado involucrado con muchos matemáticos españoles en el estudio de los problemas de difusión anómala con operadores no locales, como hemos reseñado en la sección 2.5. Además, ha sido otra fuente de amistades y viajes, así como de angustias y placeres matemáticos. Entre los colaboradores de las jóvenes generaciones se cuentan Fernando Charro, Xavier Ros-Otón, Joaquim Serra y María Soria.

Por otro lado, Caffarelli pertenece, desde su fundación en 1985, al comité editorial de la Revista Matemática Iberoamericana, revista matemática de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) con gran prestigio internacional. En reconocimiento a su labor Luis fue nombrado Doctor Honoris Causa por la Universidad Autónoma de Madrid en 1992. Desde 2015 Luis es académico extranjero de la Real Academia de Ciencias de España. En 2017 Luis recibió con ocasión del primer congreso conjunto UMA-RSME el premio Rey Pastor.

Como se ha mencionado, la colaboración de Luis A. Caffarelli con matemáticos españoles, ha sido muy intensa y fructífera, por lo que la Real Sociedad Matemática Española lo nombró Socio de Honor en 2015. La profundidad de sus ideas, la amplitud de sus temas, unida a su generosidad y al trato sencillo, han cimentado su fama en todos los continentes, y con todos los continentes nos referimos a gente que conocemos en todos ellos. *Luis ha sido, él solo, toda una universidad no lineal para el mundo*.

Autores

María Victoria Otero Espinar, Real Sociedad Matemática Española, Universidad de Santiago de Compostela, Centro de Investigación y Tecnología Matemática de Galicia.
<mvictoria.otero@usc.es>

Juan Luis Vázquez, Real Academia Española de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid, Universidad Complutense de Madrid.
<juanluis.vazquez@uam.es>