Propiedades de los principales estadísticos

1. Media y varianza muestrales

1.1. Propiedades generales de la media

Sean $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de una población tal que $\mathrm{E}(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, entonces

(1) $\bar{X}$ es insesgado para μ: $\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$.

(2) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$.

(3) $\bar{X}$ es consistente para μ ($\bar{X} \to_P \mu$).

(4) Distribución asintótica:

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \longrightarrow_d \mathrm{N}(0, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow_d \mathrm{N}(0, 1).$$

1.2. Propiedades generales de la varianza

Si $\kappa := \mathrm{E}[(X_i - \mu)^4]/\sigma^4$ es el coeficiente de curtosis de la población, entonces

(1) S^2 es insesgado para σ^2: $\mathrm{E}(S^2) = \sigma^2$.

(2) $\mathrm{Var}(S^2) \approx (\kappa - 1)\sigma^4/n$.

(3) S^2 es consistente para σ^2 ($S^2 \to_P \sigma^2$).

(4) Distribución asintótica:

$$\sqrt{n}(S^2 - \sigma^2) \longrightarrow_d \mathrm{N}(0, (\kappa - 1)\sigma^4),$$
$$\sqrt{n}(S - \sigma) \longrightarrow_d \mathrm{N}(0, (\kappa - 1)\sigma^2/4)$$

1.3. Propiedades en poblaciones normales

Sean $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de una población $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\overline{X} \text{ y } S^2 \text{ indeps.}, \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \equiv \chi^2_{n-1}, \qquad \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \equiv \mathrm{N}(0,1) \qquad \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \equiv t_{n-1}$$

2. Proporciones muestrales

Sean $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de una distribución $\mathrm{B}(1, p)$.

(1) $\hat{p}$ es insesgado para p: $\mathrm{E}(\hat{p}) = p$.

(2) $\mathrm{Var}(\hat{p}) = p(1-p)/n$.

(3) $\hat{p}$ es consistente para p.

(4) Distribución asintótica:

$$\begin{gathered}\sqrt{n}(\hat{p}-p) \longrightarrow_d \mathrm{N}(0, p(1-p)), \\ \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \longrightarrow_d \mathrm{N}(0,1)\end{gathered}$$

3. Estadísticos de orden

3.1. Distribución conjunta

Si $\mathbf{Y} \doteq (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$, entonces

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \ldots, y_n) = n! f(y_1) \cdots f(y_n), \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_n.$$

3.2. Distribución marginal

La función de distribución y la función de densidad del estadístico de orden k, $X_{(k)}$, son respectivamente

$$F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j [1-F(x)]^{n-j}$$

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} [1-F(x)]^{n-k} f(x)$$

3.3. Comportamiento asintótico de la mediana muestral

Sea M_n la mediana muestral de vaiid de una población F tal que existe un único m con $F(m) = 1/2$ y F derivable en m con derivada $f(m) > 0$. Entonces,

$$\sqrt{n}(M_n - m) \longrightarrow_d \mathrm{N}\big(0, \frac{1}{4f^2(m)}\big)$$