

MATEMÁTICAS AL ESPRINT
VETERANOS - CURSO 2020/21
19 de Diciembre de 2020

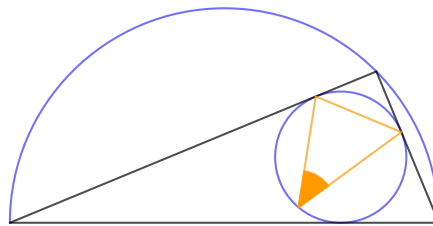
En algunos de estos problemas, se denota por A_i a números que pasan del problema i a otro.

Problema 1. Si las raíces de $x^2 + bx + c = 0$ son b y c , con $b \neq c$, calcula el par ordenado de números (b, c) .

- La solución que debes indicar de este problema es el par ordenado (b, c) .
- El valor $A_1 = |b| + |c|$ se utilizará en el problema 8.

Problema 2. En este problema se usa el número A_6 . Un polígono regular de $2n$ lados está inscrito en una circunferencia de radio A_6 y sabemos que la suma de los cuadrados de las distancias desde cualquier punto de la circunferencia a los vértices del polígono es 600. Calcula n . La solución que debes indicar de este problema es n .

Problema 3. Como muestra la figura, tenemos un triángulo inscrito en una circunferencia y otro triángulo inscrito en una semicircunferencia. ¿Cuánto mide el ángulo sombreado?



Problema 4. En este problema se usa el número A_6 . El número $3^{32} - 1$ tiene exactamente dos divisores que son mayores que $15A_6$ y menores que $17A_6$. ¿Cuánto suman las cifras del producto de esos dos divisores?

Problema 5. Entre la gráfica de $y = \text{sen } x$ entre 0 y π y el eje OX , inscribimos un rectángulo $ABCD$. Si la base AB (sobre el eje OX) tiene longitud $\frac{2\pi}{3}$, calcula la longitud de BC . Esta misma longitud pasa como número A_5 al problema 10.

Problema 6. Si $2x^2 - 10x + 7 = 2y^2 - 10y + 7$ pero $x \neq y$, calcula $x + y$. El resultado $A_6 = x + y$ se utilizará en el problema 2 y en el problema 4.

Problema 7. Una partícula empieza a moverse desde el origen de coordenadas así:

- 1 unidad a la derecha
- $\frac{1}{2}$ unidad hacia arriba
- $\frac{1}{4}$ unidad a la derecha
- $\frac{1}{8}$ unidad hacia abajo
- $\frac{1}{16}$ unidad a la derecha

y así sucesivamente. La longitud de cada movimiento es la mitad del anterior y la trayectoria continúa en zig-zag de la forma descrita. Calcula las coordenadas (x, y) del punto hacia el que converge la partícula (es decir, al punto al que se aproxima o punto límite). Expresa las coordenadas con fracciones irreducibles.

Problema 8. En este problema se usa el número A_1 . El polinomio de coeficientes reales $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ cumple que $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 10A_1$. Calcula:

$$\frac{P(12) + P(-8) - 40}{10}.$$

Problema 9. Fíjate bien y obtén, justificadamente, los enteros positivos a, b y c para los que la expresión:

$$\frac{6}{\sqrt{a+12} - \sqrt{12a} + \sqrt{b+6} - \sqrt{20b} + \sqrt{c+10} - \sqrt{24c}}$$

es un número entero positivo. Calcula en ese caso el valor de $a + b + c$. Esta misma suma $a + b + c$ pasa como A_9 al problema 10.

Problema 10. En este problema se usan los números A_5 y A_9 . En el triángulo ABC se tiene que $a \geq b \geq c$. Si:

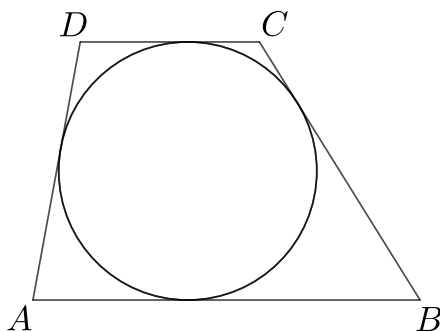
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{\operatorname{sen}^3 A + \operatorname{sen}^3 B + \operatorname{sen}^3 C} = A_5 \cdot A_9,$$

calcula el máximo valor posible para a . La solución que debes indicar en este problema es a^3 . A su vez, a^3 pasa como número A_{10} y se utilizará en el problema 11.

Problema 11. En este problema se usa el número A_{10} . Calcula x si:

$$1 \cdot 2019 + 2 \cdot 2018 + \dots + 2018 \cdot 2 + 2019 \cdot 1 = 2021 \cdot (1003 + A_{10}) \cdot x.$$

Problema 12. Un círculo de 5 cm de radio está inscrito en el trapecio $ABCD$ que tiene de área 150 cm^2 . ¿Cuánto vale la suma de las longitudes de los dos lados oblicuos AD y BC ?



PROBLEMAS DE PROPINA

Problema 13. Dos cuadrados de lado 1 tienen el mismo centro y uno de ellos se obtiene al rotar el primer cuadrado sobre su centro 45 grados. Calcula el área del octógono formado por la intersección de los dos cuadrados.

Problema 14. Si p, q y r representan proposiciones cuya probabilidad de ser ciertas es la misma que la de ser falsas, calcula la probabilidad de que sea cierta la proposición $p \Rightarrow q \wedge r$ (es decir, p implica que se cumplen q y r).

Problema 15. Los lados de un cuadrilátero son 3, 3, 4 y 8 (no tienen por qué estar en ese orden). Dos de sus ángulos tienen el seno igual pero cosenos diferentes y el cuadrilátero no puede inscribirse en una circunferencia. Calcula su área. Expresa el resultado como una fracción irreducible $\frac{a}{b}$ de enteros positivos.