Une remarque sur l'analyse asymptotique spectrale en homogénéisation.

Carlos CASTRO et Enrique ZUAZUA

Résumé - On étudie le comportement asymptotique du spectre de l'équation des ondes dans un milieu hétérogène périodique lorsque la période ϵ tend vers zéro. Si l'on dénote par λ_j^ϵ la j-ème valeur propre correspondante à la période ϵ on démontre que σ_∞, l'ensemble de points d'accumulation de suites de la forme $\epsilon^2\lambda^\epsilon_{j(\epsilon)}$ lorsque $\epsilon \to 0$, coincide avec la demi-droite $I\!R^+$. Cela complète des résultats précédents de G. Allaire et C. Conca et montre que le "spectre couche limite" remplit le complementaire du spectre de Bloch dans $I\!R^+$.

Abstract - We study the asymptotic behavior of the spectrum of the wave equation in a periodic heterogeneous medium as its period ϵ tends to zero. We denote by λ_j^ϵ the j-th eigenvalue corresponding to the period ϵ and by σ_∞ the set of accumulation points of sequences of the form $\epsilon^2\lambda^\epsilon_{j(\epsilon)}$ as $\epsilon \to 0$. We prove that $\sigma_\infty = I\!R^+$. This completes previous results by G. Allaire and C. Conca and shows that the "boundary-layer spectrum" fills in the complement of the Bloch spectrum in $I\!R^+$.

A remark on the spectral asymptotic analysis in homogenization

Abridged english version.- Let us consider the eigenvalue problem for the wave equation in a bounded domain Ω occupied by a periodic heterogeneous medium with homogeneous boundary conditions,

$$-\mathrm{div}\left[A\left(x,\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla v_\epsilon\right] = \lambda_\epsilon v_\epsilon \quad \text{ in } \Omega, \quad v_\epsilon = 0 \quad \text{ on } \partial\Omega \tag{1}$$

where $A(x,y)$ is a smooth, coercive, symmetric matrix which is Y-periodic in y, Y being the unit cube $[0,1]^N$. For each $\epsilon > 0$, the set of eigenvalues $\{\lambda_k^\epsilon\}_{k\in I\!N}$ form a sequence of positive real numbers converging to infinity, i.e.

$$0 < \lambda_1^\epsilon \leq \lambda_2^\epsilon \leq \cdots \leq \lambda_k^\epsilon \leq \cdots \to \infty.$$

In two recent Notes, G. Allaire and C. Conca ([1] and [2]) were concerned with the possible limit points of the sequences $\epsilon^\alpha\lambda^\epsilon_{k(\epsilon)}$, as $\epsilon \to 0$, where $k(\cdot)$ is any function, $k(\cdot) : [0,1] \to I\!N$, and $\alpha > 0$. We denote by $\sigma_\infty(\alpha)$ the set of these accumulation points.

To study the structure of $\sigma_\infty(\alpha)$, they introduced a family of limit problems indexed by $x \in \bar\Omega$ and $\theta \in Y$:

$$-\mathrm{div}_y\left[A(x,y)\nabla_y(v(y)e^{2\pi i\theta\cdot y})\right] = \lambda(x,\theta)v(y)e^{2\pi i\theta\cdot y} \quad \text{in Y;} \quad v = v(y), \quad \text{Y-periodic.}$$

For each value $(x,\theta) \in \Omega \times Y$ this problem admits a sequence of positive eigenvalues $\{\lambda_k(x,\theta)\}$ which depend continuously on x and θ. The span of these eigenvalues is what they call the *Bloch spectrum*:

$$\sigma_{Bloch} = \bigcup_{k\geq 1}\left[\min_{(x,\theta)\in\Omega\times Y}\lambda_k(x,\theta), \max_{(x,\theta)\in\Omega\times Y}\lambda_k(x,\theta)\right].$$

They found that for $0 < \alpha \neq 2$ the limit set $\sigma_\infty(\alpha) = I\!R^+$, while for the case $\alpha = 2$ the limit set can be split in two parts: one consisting in σ_{Bloch}, and another corresponding to the so-called *boundary layer spectrum* corresponding to sequences v_ϵ of eigenfunctions which concentrate on the boundary $\partial\Omega$.

Our purpose is to show that $\sigma_\infty(\alpha) = I\!R^+$ for any $\alpha > 0$. Actually, this result holds in a very general setting of compact selfadjoint operators in Hilbert spaces depending continuously on a parameter that we describe below. Our remark shows, in particular, that the *boundary layer spectrum* is always nonempty.

Let T^ϵ ($\epsilon \in [0,1]$) be a family of selfadjoint compact operators on a Hilbert space H. For each ϵ, the operator T^ϵ has a countable sequence of eigenvalues with finite multiplicity and converging to zero:

$$\mu_1^\epsilon \geq \mu_2^\epsilon \geq \cdots \geq \mu_n^\epsilon \geq \cdots \to 0.$$

Then, $\{\lambda_k^\epsilon = \frac{1}{\mu_k^\epsilon}\}_{k\in I\!N}$ is an increasing sequence of real numbers such that $\lambda_k^\epsilon \to \infty$, as $k \to \infty$, as in the context of (1).

Theorem 1 *Suppose that the family T^ϵ satisfies the following property: For each $k \in I\!N$ the function $\mu_k(\epsilon) = \mu_k^\epsilon$ is continuous with respect to $\epsilon \in [0,1]$. Then, for each $\alpha > 0$ and $a > 0$ there exists a sequence $\epsilon_j \to 0$ and a sequence of natural numbers $\{k(\epsilon_j)\}_{j\in I\!N}$ such that*

$$\lambda_{k(\epsilon_j)}^{\epsilon_j} \epsilon_j^\alpha = a.$$

Proof.- Suppose that there exist $\alpha > 0$ and $a > 0$ such that for any $\epsilon_j \to 0$ and any $\{k(\epsilon_j)\} \subset I\!N$

$$\lambda_{k(\epsilon_j)}^{\epsilon_j} \epsilon_j^\alpha \neq a. \tag{2}$$

Define $\lambda(\epsilon) = \frac{a}{\epsilon^\alpha}$. Since $\lambda_j^1 \to \infty$, as $j \to \infty$, we can find a number i_0 such that for any $i > i_0$, $\lambda_i^1 = \lambda_i(1) > a$, and then $\lambda_i(1) - \lambda(1) = \lambda_i(1) - a > 0$. On the other hand,

$$\lambda_i(\epsilon) - \lambda(\epsilon) \to -\infty \qquad \text{as } \epsilon \to 0^+$$

since $\lambda_i(\epsilon)$ is a bounded function on $[0,1]$. As $\lambda_i(\epsilon) - \lambda(\epsilon)$ is a continuous function there exists a number ϵ_i such that $\lambda_i(\epsilon_i) = \lambda(\epsilon_i) = a\epsilon_i^{-\alpha}$. By (2) the sequence $\{\epsilon_i\}_{i>i_0}$ can not have subsequences converging to zero, so that $\inf_{i>i_0} \epsilon_i = \epsilon^* > 0$. Take $\lambda^* = \lambda(\epsilon^*) = a(\epsilon^*)^{-\alpha}$. The number of eigenvalues corresponding to $\epsilon = \epsilon^*$, $\{\lambda_i^{\epsilon^*}\}_{i>i_0}$, smaller than λ^* is finite, and we can find a number $i_1 > i_0$ such that $\lambda_i^{\epsilon^*} > \lambda^*$ for each $i > i_1$. But, in this case,

$$\lambda_i(\epsilon) - \lambda(\epsilon) \to -\infty, \qquad \text{as } \epsilon \to 0$$

while

$$\lambda_i(\epsilon^*) - \lambda(\epsilon^*) = \lambda_i(\epsilon^*) - \lambda^* > 0$$

and there must be some $\epsilon_i < \epsilon^*$ with $\lambda_i(\epsilon_i) = \lambda(\epsilon_i)$ which contradicts the definition of ϵ^*.

$\blacksquare$

We observe that the conditions of Theorem 1 are fullfilled for the system (1). The continuity of the eigenvalues for $\epsilon = 0$ is a well known homogenization result (see, for instance, [4], chapter III, where the same type of results is proved for a large class of problems), while for $\epsilon > 0$ is easier. In this last case we can even use the classical perturbation theory of linear bounded operators.

1.Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$ occupé par un milieu hétérogène périodique de période $\epsilon > 0$. On considère le problème de valeurs propres

$$-\text{div}\left[A\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\nabla v_\epsilon\right] = \lambda_\epsilon v_\epsilon \quad \text{ in } \Omega, \quad v_\epsilon = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

On suppose que la matrice symétrique $A(x,y)$ appartient à $C(\bar{\Omega}; L^\infty_\sharp(Y))$, i.e. elle est continue dans x et périodique dans la variable microscopique y dans le cube $Y = [0,1]^n$.

Pour tout $\epsilon > 0$ les valeurs propres $\{\lambda_k^\epsilon\}_{k\in I\!N}$ solution de (1) constituent une suite de réels positifs tendant vers l'infini, i.e.

$$0 < \lambda_1^\epsilon \leq \lambda_2^\epsilon \leq \cdots \leq \lambda_k^\epsilon \leq \cdots \to \infty.$$

G. Allaire et C. Conca dans [1] et [2] ont étudié le comportement asymptotique du spectre à hautes fréquences et différentes échelles. Ils ont démontré que l'ensemble $\sigma_\infty(\alpha)$ de points d'accumulation de suites de la forme $\epsilon^\alpha \lambda^\epsilon_{k(\epsilon)}$, lorsque $\epsilon \to 0$ vérifie:

(a) $\sigma_\infty(\alpha) = I\!R^+$ si $\alpha \neq 2$;

(b) $\sigma_\infty(\alpha) = \sigma_{Bloch} \cup \sigma_{bord} \cup \{0\}$,

oú σ_{Bloch} c'est le "spectre de Bloch" et σ_{bord} c'est le "spectre couche limite". Plus précisement, pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $\theta \in Y$ on considère le problème de valeurs propres

$$-\mathrm{div}_y \left[A(x,y) \nabla_y (v(y) e^{2\pi i \theta \cdot y}) \right] = \lambda(x,\theta) v(y) e^{2\pi i\theta\cdot y} \ \text{ dans Y; } v = v(y) \text{ Y-périodique.} \tag{2}$$

Por chaque $(x,\theta) \in \bar{\Omega} \times Y$ ce problème admet une suite de valeurs propres positives $\{\lambda_k(x,\theta)\}_{k\in I\!N}$ qui dépend continûment des paramètres (x,θ). Le spectre de Bloch est l'union de tous ces spectres:

$$\sigma_{Bloch} = \bigcup_{k\geq 1} \left[\min_{(x,\theta)\in\Omega\times Y} \lambda_k(x,\theta), \max_{(x,\theta)\in\Omega\times Y} \lambda_k(x,\theta) \right].$$

D'autre part, le sous-ensemble σ_{bord} du spectre limite $\sigma_\infty(2)$ provient des limites des quantitiés $\epsilon^2 \lambda^\epsilon_{k(\epsilon)}$ où $\lambda^\epsilon_{k(\epsilon)}$ correspond à des quasi fonctions propres dont l'énergie se concentre autour du bord $\partial\Omega$ (voir [2], Def. 3).

On observe que de l'analyse de [1] et [2] on n'en déduit pas que σ_{bord} soit non-vide mais plutôt que tout éventuel point d'accumulation qui n'est pas dans σ_{Bloch} provient necessairement de suites correspondantes à des fonctions propres concentrées au bord.

Dans cette Note nous démonstrons le résultat suivante:

Théorème 1 *Pour tout $\alpha > 0$, $\sigma_\infty(\alpha) = I\!R^+$.*

Lorsque $\alpha = 2$ ce résultat complète l'analyse de [1] et [2] et montre que le "spectre couche limite" σ_{bord} remplit le complémentaire du spectre de Bloch dans $I\!R^+$.

Ce résultat, de démonstration simple, découle des propriétés générales des familles d'opérateurs auto-adjoints, compacts dans les espaces de Hilbert dépendant continûment d'un paramètre. Ce résultat abstrait est présenté dans la section suivante.

2.Une propriété générale des familles d'opérateurs compacts, auto-adjoints dans les espaces de Hilbert.

Soit $\{T^\epsilon\}_{0\leq\epsilon\leq 1}$ une famille d'opérateurs compacts, autoadjoints dans l'espace de Hilbert H. Pour chaque $0 \leq \epsilon \leq 1$, T^ϵ admet une suite de valeurs propres de multiplicité finie qui converge vers zero, i.e.

$$\mu_1^\epsilon > \mu_2^\epsilon \geq \mu_3^\epsilon \geq \cdots \geq \cdots \to 0. \tag{3}$$

On suppose que la famille $\{T^\epsilon\}$ est telle que les fonctions $\mu_k(\epsilon) = \mu_k^\epsilon$ sont continues par rapport à $0 \leq \epsilon \leq 1$ por chaque $k \in I\!N$.

On a alors le résultat suivant:

Théorème 2 *Pour tout $\alpha > 0$ et $a > 0$ il existe une suite $\epsilon_j \to 0$ et des indices $\{k(\epsilon_j)\}_{j\in I\!N}$ tels que*

$$\epsilon_j^\alpha = a\mu_{k(\epsilon_j)}^{\epsilon_j}. \tag{4}$$

Remarque 1 *D'après (4), non-seulement tout $a > 0$ est point d'accumulation des suites de la forme $\epsilon_j^\alpha/\mu_{k(\epsilon_j)}^{\epsilon_j}$, mais la valeur a est prise exactement le long d'une sous-suite.*

Demonstration.- On procède par réduction à l'absurde. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et $a > 0$ tels que pour toute suite $\epsilon_j \to 0$ et $\{k(\epsilon_j)\}_{j\in I\!N} \subset I\!N$ on ait

$$\epsilon_j^\alpha \neq a\mu_{k(\epsilon_j)}^{\epsilon_j}. \tag{5}$$

On pose $\lambda_k^\epsilon = 1/\mu_k^\epsilon$ et l'on définit $\lambda(\epsilon) = a/\epsilon^\alpha$. Comme $\mu_j^1 \to 0^+$ lorsque $j \to \infty$ on a $\lambda_j^1 \to \infty$. Donc, il existe i_0 tel que $\lambda_i^1 = \lambda_i(1) > a$ pour tout $i > i_0$ et alors: $\lambda_i(1) - \lambda(1) = \lambda_i(1) - a > 0$. D'autre part

$$\lambda_i(\epsilon) - \lambda(\epsilon) \to -\infty \quad \text{lorsque } \epsilon \to 0^+$$

pour tout $i \in I\!N$, car $\lambda_i(\epsilon)$ est bornée par rapport à ϵ et $\lambda(\epsilon) \to \infty$ lorsque $\epsilon \to 0$.

Comme $\lambda_i(\epsilon) - \lambda(\epsilon)$ est continue par rapport à $0 \le \epsilon \le 1$, on déduit l'existence de $\epsilon_i > 0$ tel que $\lambda_i(\epsilon_i) = \lambda(\epsilon_i) = a\epsilon_i^{-\alpha}$. D'après (5), la suite ϵ_i ne peut pas avoir des sous-suites qui tendent vers zéro ou, autrement dit, $\epsilon^* = \inf_{i>i_0} \epsilon_i > 0$. Soit $\lambda^* = \lambda(\epsilon^*) = a(\epsilon^*)^{-\alpha}$. Le nombre de valeurs propres $\{\lambda_i^{\epsilon^*}\}_{i>i_0}$ qui correspondent à $\epsilon = \epsilon^*$ et plus petites que λ^* est fini (car $\lambda_i^{\epsilon^*} \to \infty$ lorsque $i \to \infty$). Il existe donc $i_1 \in I\!N$ tel que $\lambda_i^{\epsilon^*} > \lambda^*$ pour tout $i > i_1$. Donc, si $i > i_1$

$$\lambda_i(\epsilon^*) - \lambda(\epsilon^*) = \lambda_i(\epsilon^*) - \lambda^* > 0$$

et

$$\lambda_i(\epsilon) - \lambda(\epsilon) \to -\infty, \quad \text{lorsque } \epsilon \to 0.$$

Par conséquent, il existe $\epsilon' < \epsilon^*$ tel que $\lambda_i(\epsilon') = \lambda(\epsilon')$, ce qui contredit la definition de ϵ^*.

■

3.Application à l'homogénéisation

Dans le cadre des problèmes elliptiques (1), pour chaque $0 \le \epsilon \le 1$ on introduit l'opérateur $S_\epsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))$ tel que pour tout $f \in L^2(\Omega))$, $u_\epsilon = S_\epsilon f$ est l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$-\mathrm{div}\left[A\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon\right] = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{6}$$

On sait que S_ϵ est autoadjoint et compact. D'autre part λ_k^ϵ est une valeur propre de (1) si et seulement si $\mu_k^\epsilon = 1/\lambda_k^\epsilon$ est une valeur propre de S_ϵ.

Les solutions de (6) convergent faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $\epsilon \to 0$ vers les solutions du problème limite:

$$-\mathrm{div}\,(A^*(x)\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{7}$$

A^* étant la matrice homogénéisée (voir, par example, [3]). Le problème (7) nous permet de définir un opérateur compact autoadjoint S dans $L^2(\Omega)$: $Sf = u$.

La dépendance continue des valeurs propres λ_k^ϵ par rapport à $0 \le \epsilon \le 1$ est bien connue. Lorsque $\epsilon = 0$ il s'agit d'un résultat classique en théorie d'homogénéisation (voir, par example, [4]) tandis que, pour $\epsilon > 0$, il est bien plus facile à démontrer car $A\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \to A\left(x, \frac{x}{\epsilon_0}\right)$ dans $L^2(\Omega \times \Omega)$ lorsque $\epsilon \to \epsilon_0 > 0$.

Le Théorème 1 est donc une conséquence immédiate du Théorème 2.

Les hypothèses que nous avons fait sur $A(x, y)$ peuvent être afaibliés. Il suffit en fait que la continuité des valeurs propres par rapport à l'indice ϵ soit garantié.

Ces résultats sont valables pour des équations des ondes dans des milieux à densité rapidement oscillante, i.e. pour des problèmes du type

$$-\Delta v_\epsilon = \lambda_\epsilon \rho(x/\epsilon) v_\epsilon \quad \text{dans } \Omega; \quad v_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{8}$$

Remerciement.- Ce travail a été partiellement financé par les projets PB93-1203 de la DGICYT (Espagne) et CHRX-CT94-0471 de l'Union Européenne.

References.-

[1] G. Allaire et C. Conca.- *"Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Homogénéisation par ondes de Bloch. "* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, (1995), Part I, 293-298.

[2] G. Allaire et C. Conca.- *"Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Homogénéisation par ondes de Bloch. "* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, (1995), Part II, 557-562.

[3] A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou.- *Asymptotic Analysis for periodic structures.* North Holland, Amsterdam, 1978.

[4] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian.- *Mathematical problems in elasticity and homogenization,* North Holland, 1992.

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense, 28040 Madrid, España.