CONTRÔLE OPTIMAL. — *Contrôlabilité exacte d'un modèle de plaques vibrantes en un temps arbitrairement petit.* Note de **Enrike Zuazua,** présentée par Jacques-Louis Lions.

On étudie la contrôlabilité exacte du système d'évolution : $y''+\Delta^2 y=0$, dans $Q=\Omega\times]0, T[$; $y=v_1$, $\partial y/\partial\nu=v_2$, sur $\Sigma=\partial\Omega\times]0, T[$, c'est-à-dire la possibilité de trouver (v_1, v_2) tel que pour des conditions initiales données, on ait $y(T)=y'(T)=0$ dans Ω. Dans le cas où l'on agit sur le système avec le seul contrôle v_2 (i. e. si on a $v_1\equiv 0$), J.-L. Lions a démontré dans [5] que le système est exactement contrôlable si T est suffisamment grand. Nous démontrons ici que l'action supplémentaire de v_1 permet de contrôler exactement le système en un temps arbitrairement petit. Nous démontrons qu'en fait on peut imposer à v_1 d'appartenir à $H_0^k(\Sigma_1)$, où $k>0$ et Σ_1 ouvert de Σ sont arbitraires. La démonstration repose sur la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) introduite par J.-L. Lions, ainsi que sur des résultats de prolongement unique de type Holmgren et des arguments de compacité.

OPTIMAL CONTROL. — Exact controllability of a vibrating plate model for an arbitrarily small time.

We consider the evolution system: $y''+\Delta^2 y=0$, in $Q=\Omega\times]0, T[$; $y=v_1$, $\partial y/\partial\nu=v_2$, on $\Sigma=\partial\Omega\times]0, T[$. Its exact controllability, i.e., the existence of (v_1, v_2) such that for given initial data the solution satisfies $y(T)=y'(T)=0$ in Ω, is studied. For T large enough the exact controllability, only using the control v_2 (i. e. $v_1\equiv 0$), is proved by J.-L. Lions in [5]. This Note proves the exact controllability of the system for an arbitrarily small T when both v_1 and v_2 are used as controls. Actually, it is proved that v_1 can be chosen in $H_0^k(\Sigma_1)$, where $k>0$ and Σ_1 open subset of Σ are arbitrary. The proof relies on HUM (Hilbert Uniqueness Method) introduced by J.-L. Lions and on a unique extension principle of Holmgren's type combined with compactness arguments.

1. FORMULATION DU PROBLÈME. — Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière $\Gamma=\partial\Omega$ régulière. On considère le système de Petrowsky:

$$y''+\Delta^2 y=0, \quad \text{dans } Q=\Omega\times]0, T[\tag{1}$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$y(0)=y^0; \qquad y'(0)=y^1, \quad \text{dans } \Omega \tag{2}$$

$$y=v_1; \qquad \partial y/\partial\nu=v_2, \quad \text{sur } \Sigma=\Gamma\times]0, T[\tag{3}$$

où ν désigne le vecteur normal extérieur à Γ et « $\partial/\partial\nu$ » la dérivée dans cette direction; v_1 et v_2 sont les contrôles.

On désigne par $y=y(\cdot; v)$ la solution de (1)-(2)-(3), où $v=(v_1, v_2)$.

Dans le cas où $n=2$, le système ci-dessus modélise la vibration d'une plaque Ω.

L'objet de la Note est de prouver que la solution $y=y(v)$ de (1)-(2)-(3) peut être ramenée à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ en un temps arbitrairement petit. Autrement dit, il s'agit de démontrer que pour des données initiales $\{y^0, y^1\}$ appartenant à des espaces de Hilbert (qu'on va caractériser) et $T>0$ quelconque il existe un contrôle v (aussi dans des espaces qu'on va préciser) tel que l'on ait :

$$y(T; v)=y'(T; v)=0, \quad \text{dans } \Omega. \tag{4}$$

La contrôlabilité exacte du système en un temps arbitrairement petit est très fortement liée à la nature non hyperbolique du système et notamment à des phénomènes de propagation à vitesse infinie.

On attaque le problème en appliquant la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) introduite par J.-L. Lions dans [4] et [5] et on se ramène donc à l'obtention des estimations *a priori* pour le système homogène associé. A partir des estimations établies par J.-L. Lions dans [5] par des méthodes de multiplicateurs on aboutit à des estimations en un temps arbitrairement petit qui nous permettent de conclure à la contrôlabilité exacte dans des espaces de Sobolev usuels. Dans l'obtention de ces dernières estimations on utilise essentiellement des critères de prolongement unique et des arguments de compacité.

0249-6291/87/03040173 $ 2.00 © Académie des Sciences

Remarque 1. — Dans le paragraphe 3, on considèrera un système d'évolution analogue où la condition aux limites (3) est remplacé par

(5) $$y=v_1;\qquad \Delta y=v_2,\quad \text{sur}\, \Sigma=\Gamma\times]0,\, T[.$$

Remarque 2. — J. Lagnese et J.-L. Lions [3] ont aussi obtenu des résultats liés mais différents de contrôlabilité exacte pour divers modèles de plaques.

2. Le résultat fondamental. — On introduit d'abord quelques notations. Soit $x^0 \in \mathbf{R}^n$ et $m(x)=x-x^0=(x_i-x_i^0)$, $\Gamma(x^0)=\{x\in\Gamma/m(x)\cdot \nu(x)=m_i(x)\nu_i(x)\geqq 0\}$, $\Sigma(x^0)=\Gamma(x^0)\times]0, T[\subset\Sigma$. Ensuite pour $z\in\Gamma(x^0)$ et $\varepsilon>0$ quelconques on définit $\Gamma(z,\varepsilon)=\Gamma(x^0)\cap B(z,\varepsilon)$ et $\Sigma(z,\varepsilon)=\Gamma(z,\varepsilon)\times]0, T[$, $B(z,\varepsilon)$ désignant la boule de centre z et de rayon ε.

En ce qui concerne le système (1)-(2)-(3) on a le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 1. — *Soient* $T>0$, $x^0\in\mathbf{R}^n$, $k>0$ *et* $\Sigma(z,\varepsilon)$ *quelconques. Pour tout couple de données initiales*

(6) $$\{y^0, y^1\}\in L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)$$

il existe un contrôle

(7) $$v=(v_1, v_2)\in H_0^k(\Sigma(z,\varepsilon))\times L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $y=y(v)$ *de* (1)-(2)-(3) *satisfait* (4).

Remarque 3. — La condition (7) doit être interprétée au sens que l'action du contrôle v sur la frontière du système est réalisée de la manière suivante :

(8) $$y=\begin{cases} v_1, & \text{sur } \Sigma(z,\varepsilon)\\ 0, & \text{sur } \Sigma\setminus\Sigma(z,\varepsilon)\end{cases};\qquad \partial y/\partial\nu=\begin{cases} v_2, & \text{sur } \Sigma(x^0)\\ 0, & \text{sur } \Sigma\setminus\Sigma(x^0).\end{cases}$$

J.-L. Lions a démontré dans [5] que si $T>T(x^0)$, avec $T(x^0)$ assez grand convenable, le système est exactement contrôlable même avec $v_1=0$. V. Komornik a amélioré cette première estimation de $T(x^0)$ dans [2]. Le théorème 1 démontre que l'action supplémentaire du contrôle v_1 sur *un ouvert cylindrique arbitrairement petit* de $\Sigma(x^0)$ (car on peut choisir $\varepsilon>0$ arbitrairement petit) nous permet de contrôler exactement le système dans *un temps* $T>0$ *quelconque*. De plus, étant donné $k>0$ *quelconque, le contrôle* v_1 *peut être choisi dans l'espace* H_0^k.

Démonstration du théorème 1. — On applique HUM et on se ramène donc à l'étude des solutions du problème homogène :

(9) $$\begin{cases} \Phi''+\Delta^2\Phi=0, & \text{dans } Q\\ \Phi(0)=\Phi^0;\quad \Phi'(0)=\Phi^1, & \text{dans } \Omega\\ \Phi=\partial\Phi/\partial\nu=0, & \text{sur } \Sigma\end{cases}$$

avec des données initiales régulières Φ^0, $\Phi^1\in\mathscr{D}(\Omega)$. Le problème (9) a une solution régulière unique Φ et l'énergie du système $E(t)=\{\|\Delta\Phi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Phi'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\}/2$ est conservée le long de la trajectoire, i. e.

$$E(t)=E_0=E_0(\Phi^0,\Phi^1)=\{\|\Delta\Phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2\}/2,\qquad \forall t\in[0, T].$$

Le point essentiel de la démonstration consiste à prouver le lemme 1 suivant à l'aide de critères de prolongement unique et des arguments de compacité.

Lemme 1. — *Il existe une constante* $C>0$ *telle que* $\forall\Phi^0$, $\Phi^1\in\mathscr{D}(\Omega)$ *on a l'inégalité :*

(10) $$E_0\leqq C\{\|\Delta\Phi\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2+\|\partial\Delta\Phi/\partial\nu\|_{H^{-k}(\Sigma(z,\varepsilon))}^2\}.$$

Démonstration du lemme 1. — D'après [5] on a, par une technique de multiplicateurs,

(11) $$E_0 \leqq C\{\|\Phi\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))}+\|\Delta\Phi\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))}\}.$$

Il suffit donc de démontrer l'estimation

(12) $$\|\Phi\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} \leqq C\{\|\Delta\Phi\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))}+\|\partial\Delta\Phi/\partial\nu\|^2_{H^{-k}(\Sigma(z,\varepsilon))}\}.$$

On raisonne par l'absurde. Si (12) n'est pas vérifiée, il existe une suite de données initiales $(\Phi^0_j, \Phi^1_j)\in\mathscr{D}(\Omega)\times\mathscr{D}(\Omega)$ telle que la suite (Φ_j) de solutions de (9) associée satisfait

(13) $$\|\Phi_j\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))}=1, \qquad \forall j\in\mathbf{N}$$

(14) $$\|\Delta\Phi_j\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))}+\|\partial\Delta\Phi_j/\partial\nu\|^2_{H^{-k}(\Sigma(z,\varepsilon))}\to 0, \quad \text{quand } j\to+\infty$$

et d'après (11)

(15) $$E_{0j}=E_0(\Phi^0_j, \Phi^1_j)\leqq C, \qquad \forall j\in\mathbf{N}.$$

On définit ensuite un prolongement ρ_j de Φ_j au cylindre $\Theta=\vartheta\times]0, T[$ avec $\vartheta=\Omega\cup B(z,\varepsilon)$,

(16) $$\rho_j=\begin{cases}\Phi_j, & \text{dans } Q\\ 0, & \text{dans } \Theta\setminus Q,\end{cases} \qquad \forall j\in\mathbf{N}.$$

D'après (13) et (15) la suite (ρ_j) satisfait :

(17) $$\|\rho_j\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\vartheta))}=1, \qquad \forall j\in\mathbf{N}$$

(18) $$\|\rho_j\|^2_{L^\infty(0,T;H^2_0(\vartheta))}+\|\rho'_j\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\vartheta))}\leqq C, \qquad \forall j\in\mathbf{N}.$$

Quitte à extraire une sous-suite on a donc

(19) $$\rho_j\to\rho, \quad \text{dans } L^\infty(0,T;H^2_0(\vartheta))\cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\vartheta)) \text{ faible}*$$

et d'après un théorème de compacité de type Aubin :

(20) $$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\vartheta))}=1.$$

Par ailleurs, (14) implique

(21) $$\rho''+\Delta^2\rho=0, \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Theta)$$

et par construction de la suite (ρ_j) :

(22) $$\rho=0, \quad \text{dans } \Theta/Q.$$

Voyons que (20), (21) et (22) donnent une contradiction. En effet, les plans caractéristiques de l'opérateur $\partial^2/\partial t^2+\Delta^2$ sont de la forme $S=\{(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}/t=\text{Cte}\}$ et donc, d'après un principe de prolongement unique (*cf.* L. Hörmander [1], th. 5.3.3), (21) et (22), on déduit que $\rho=0$ dans Θ et ceci contredit (20). ●

Le théorème 1 est maintenant une conséquence de l'application de HUM et du lemme précédent. ●

Remarque 4. — La conclusion du théorème 1 reste valable si on remplace l'ensemble $\Sigma(z,\varepsilon)$ par un ouvert non vide $\Sigma_1\subset\Sigma(x^0)$ quelconque.

3. LE CAS DE LA CONDITION AUX LIMITES (5). — On définit l'espace

$$V=\{y\in H^3(\Omega)/y=\Delta y=0, \text{ sur } \Gamma\}.$$

Soit V′ son dual. En ce qui concerne le système (1)-(2)-(5) le résultat fondamental est le suivant.

THÉORÈME 2. — *Soient* $T>0$ *et* $x^0\in\mathbf{R}^n$ *quelconques. Pour tout couple de données initiales*

(23) $$\{y^0, y^1\}\in H^{-1}(\Omega)\times V'$$

il existe un contrôle

(24) $$v=(v_1, v_2)\in L^2(\Sigma(x^0))\times H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma(x^0))$$

tel que la solution $y=y(v)$ *de* (1)-(2)-(5) *satisfait* (4).

Remarque 5. — La démonstration repose sur les techniques utilisées au paragraphe 2. Cependant, le résultat obtenu est d'une nature différente car

(*a*) les vecteurs contrôle v_1 et v_2 ont le même support $\Sigma(x^0)$;

(*b*) aucun des vecteurs contrôle ne peut être choisi arbitrairement régulier, au moins par cette méthode.

Ces phénomènes sont dus aux premières estimations *à priori* obtenues par la méthode des multiplicateurs, qui nous permettent ensuite d'appliquer les arguments de prolongement unique et de compacité.

Remarque 6. — La méthode présentée est générale. Elle s'applique en particulier à des systèmes d'évolution du type Petrowsky : $y''+(-\Delta)^m y=0$, dans Q, avec $m > 1$ et diverses conditions aux limites.

Remerciements. — Ce travail a été effectué alors que l'auteur séjournait au Laboratoire d'Analyse numérique de l'Université Pierre-et-Marie-Curie comme boursier du « Eusko Jaurlaritza » (Gouvernement Basque).

Reçue le 5 janvier 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1976.

[2] V. KOMORNIK, Contrôlabilité exacte en un temps minimal, *Comptes rendus*, 304, série I, 1987 (à paraître).

[3] J. LAGNESE et J.-L. LIONS, *Exact controllability and stabilization for various models of plates* (à paraître).

[4] J.-L. LIONS, Contrôlabilité exacte des systèmes distribués, *Comptes rendus*, 302, série I, 1986, p. 471-476.

[5] J.-L. LIONS, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. The John Von Neumann Lecture*, S.I.A.M. National Meeting, 1986, Boston.

[6] E. ZUAZUA (à paraître).

Laboratoire d'Analyse numérique, Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.