Topología — Examen final extraordinario

La calificación final será el mínimo entre 10 y la puntuación obtenida en este examen. Todas las respuestas deben justificarse.

1. (2 puntos)
(a) (1 punto) Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien un contraejemplo sencillo) si es cierta o falsa la siguiente afirmación: «Si X es un espacio topológico y G es un subconjunto abierto no vacío de X entonces $G = (\overline{G})^{\circ}$».

(b) (1 punto) Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre dos espacios topológicos y sea Q un subconjunto denso de X. Demuestra que $f(Q)$ es denso en Y. Indica en que punto de la demostración se usa la suprayectividad.

2. (3 puntos)
(a) (1 punto) Recuerda que un espacio topológico X es un *espacio de Lindelöf* si todo recubrimiento de X por abiertos contiene un subrecubrimiento numerable. Demuestra que todo subespacio cerrado de un espacio de *Lindelöf* es también un espacio de *Lindelöf.*

(b) (1 punto) Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien un contraejemplo) si es cierta o falsa la siguiente afirmación: «En un espacio de Hausdorff, la intersección no vacía de compactos es un compacto».

(c) (1 punto) Demuestra que si (X, d) es un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $D(x_1, x_2) = d(x_1, x_2) + |f(x_1) - f(x_2)|$ es también una métrica de X.
¿Es $|f(x_1) - f(x_2)|$ una métrica de X? Da una respuesta razonada.

3. (2 puntos) Considérese el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dotado de la siguiente topología:

$$\mathcal{T} = \Big\{\varnothing, X, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}\Big\} .$$

(a) (1 punto) ¿Cuál de los conjuntos $\{1,3,4\}$ y $\{2,4,5\}$ es un conjunto conexo en X? Justifica la respuesta.

(b) (1 punto) Determina razonadamente las componentes conexas de X.

4. (2 puntos) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Demuestra que son equivalentes las dos afirmaciones siguientes:
1. Todo punto de X tiene una base de entornos cerrados.
2. $\forall$ cerrado $F \subset X$, $\forall x \in X \setminus F$, $\exists$ abiertos no vacíos G_1, G_2 tales que $F \subset G_1$, $x \in G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

[Una familia $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de entornos de x es una base de entornos (de x) si para todo abierto G, tal que $x \in G$, existe $\alpha \in A$ tal que $V_\alpha \subset G$.]

5. (2 puntos)
(a) (1 punto) Clasifica razonadamente los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ según su clase de homeomorfía (dos subespacios están en la misma clase si son homeomorfos).

$$[-1,1] \times \{0\}; \qquad [-1,1) \times \{0\}; \qquad (-1,1] \times \{0\}; \qquad \mathbb{S}^1; \qquad \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

[El espacio $\mathbb{S}^1$ es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología heredada de la usual de $\mathbb{R}^2$.]

(b) (1 punto) Da un ejemplo sencillo de dos espacios topológicos X e Y que no sean homeomorfos y que cada uno de ellos sea homeomorfo a un subespacio del otro.

27 de junio de 2018

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE TOPOLOGÍA

UAM, CONVOCATORIA DE ~~27~~/06/2018

SOLUCIONES

1. a) FALSO. Existen numerosos ejemplos. Uno de los más sencillos: $X=(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{usual})$, $G=(0,1)\cup(1,2)$.
Entonces $\overline{G}=[0,2]$ y $(\overline{G})^\circ=(0,2)\neq G$.

b) Por definición, $Q\subseteq X$ es denso si y sólo si $\overline{Q}=X$
$\Leftrightarrow \forall U$ abierto en X $(U\neq\emptyset)$ se cumple $Q\cap U\neq\emptyset$.

Solución 1. $f: X\to Y$ es continua $\Leftrightarrow \forall A\subseteq X,\ f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

En nuestro caso:

$$
\begin{aligned}
Y&=f(X) && \text{(por ser } f \text{ sobreyectiva)}\\
&=f(\overline{Q}) && \text{(por ser } Q \text{ denso en } X)\\
&\subseteq\overline{f(Q)} && \text{(al ser } f \text{ continua)}\\
&\subseteq Y && \text{(porque } f: X\to Y),
\end{aligned}
$$

luego $\overline{f(Q)}=Y$; es decir, $f(Q)$ es denso en Y.

Solución 2. Basta ver que $\forall V$ abierto en Y, $V\cap f(Q)\neq\emptyset$.

En general, $f(f^{-1}(V))=V\cap f(X)$. En nuestro caso, $f(X)=Y$
$\Rightarrow f(f^{-1}(V))=V\cap Y=V$, luego

$$V\cap f(Q)=f(f^{-1}(V))\cap f(Q)\supseteq f(f^{-1}(V)\cap Q).$$

f continua $\Rightarrow f^{-1}(V)$ es abierto en X (al ser V abierto en Y) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(V)\cap Q\neq\emptyset$ (p.q. Q es denso en X) $\Rightarrow$
$f(f^{-1}(V)\cap Q)\neq\emptyset \Rightarrow V\cap f(Q)\neq\emptyset$.

② (a) Sea X un espacio de Lindelöf y $F \subseteq X$ cerrado.

Tenemos que probar que todo recubrimiento de F por abiertos de X admite un subrecubrimiento numerable.

Sean U_α abiertos de X, $\alpha \in I$, tales que $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

F es cerrado $\Rightarrow X \setminus F$ es abierto en X y

$$X = (X \setminus F) \cup F \subseteq (X \setminus F) \cup \Big(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Big) \subseteq X,$$

luego $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\} \cup \{X \setminus F\}$ es un recubrimiento de X por abiertos. X es Lindelöf $\Longrightarrow \exists \alpha_n \in I, n \in \mathbb{N}$ tales que

$$X = (X \setminus F) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} \Big).$$

Es evidente que $F \cap (X \setminus F) = \emptyset$ y, por tanto,

$$F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} \quad (\text{al ser } F \subseteq X).$$

Esto demuestra que F es también Lindelöf.

(Obsérvese que el razonamiento es totalmente análogo a la prueba -vista en clase- del siguiente resultado: "Todo subespacio cerrado de un espacio compacto también es compacto"; sólo se han cambiado los recubrimientos finitos por los numerables.)

(b) CIERTO. Sean $K_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$, compactos, X Hausdorff, $K = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$. $K_\alpha \subseteq X$, X Hausdorff, K_α compacto $\Rightarrow K_\alpha$ es cerrado, $\forall \alpha \in I$ (visto en clase). Luego $K = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ es cerrado, como intersección de cerrados. Finalmente, tomando cualquier $\alpha_0 \in I$, vemos que $K = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \subseteq K_{\alpha_0}$, compacto $\Rightarrow K$ es compacto.

(Todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto -visto en clase.)

(c) • $D(x_1,x_2)=\underbrace{d(x_1,x_2)}_{\geq 0}+\underbrace{|f(x_1)-f(x_2)|}_{\geq 0}\geq 0.$

• $D(x_1,x_2)=0 \iff d(x_1,x_2)+|f(x_1)-f(x_2)|=0 \Rightarrow 0=d(x_1,x_2)=|f(x_1)-f(x_2)| \iff x_1=x_2$ y $f(x_1)=f(x_2) \iff x_1=x_2.$

• $D(x_2,x_1)=d(x_2,x_1)+|f(x_2)-f(x_1)|=d(x_1,x_2)+|f(x_1)-f(x_2)|=D(x_1,x_2).$

• $D(x_1,x_3)=d(x_1,x_3)+|f(x_1)-f(x_3)|\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)$
$+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|$
$=D(x_1,x_2)+D(x_2,x_3).$

Esto demuestra que D es una métrica.

(d) $d(x_1,x_2)=|f(x_1)-f(x_2)|$. No es una métrica en general. Más precisamente, lo es si y sólo si f es inyectiva; de lo contrario, no tendríamos la propiedad

$$d(x_1,x_2)=0 \Rightarrow x_1=x_2$$

porque $|f(x_1)-f(x_2)|=0 \Rightarrow x_1=x_2$, $\forall x_1,x_2$

si y sólo si f es inyectiva.

Ejercicio 3 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\mathcal{T} = \{\phi, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$.

a) $\{1, 3, 4\}$ NO ES CONEXO, YA QUE ES UNIÓN DISJUNTA DE LOS ABIERTOS RELATIVOS: $\{1\}$, $\{3, 4\}$

$\{2, 4, 5\}$ TIENE ABIERTOS RELATIVOS: $\{4\}$, SOLAMENTE, POR TANTO ES CONEXO

b) $\{1\}$ ES CONEXO Y $\{2, 3, 4, 5\}$ TAMBIÉN LO ES (EL ÚNICO ABIERTO RELATIVO (PROPIO) DE $\{2, 3, 4, 5\}$ ES $\{3, 4\}$) POR TANTO,

$X = \{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$. ES LA DESCOMPOSICIÓN DE X EN COMPONENTES CONEXAS.

Ejercicio 4

Dado 1, sean F cerrado y $x \in X \setminus F$

F^c es un entorno de x por tanto existe entorno cerrado V_x : $x \in V_x \subset F^c$

Por ser V_x entorno de x $\exists$ G_2 abierto tal que $x \in G_2 \subset V_x$

Por ser V_x cerrado $G_1 = V_x^c$ es un abierto tal que $F \subset G_1$ y además $G_1 \cap G_2 = \phi$.

Dado 2.

Dado x sea G un abierto tal que $x \in G$ G^c es un cerrado : $x \notin G^c$ por tanto $\exists$ G_1, G_2 abiertos tales que

$$G^c \subset G_1 \quad y \quad x \in G_2 :$$

$$G_1 \cap G_2 = \phi \quad y \text{ por tanto}$$

$x \in G_2 \subset G_1^c \subset G$ es decir G_1^c es un entorno cerrado de x.

Ejercicio 5

a) $[-1,1)\times\{0\}$ y $(-1,1]\times\{0\}$ son homeomorfos:

$$(x,0)\longmapsto(-x,0) \text{ es un homeomorfismo}$$

Los demás espacios están en clases distintintas

$[-1,1]\times\{0\}$ es compacto y $[-1,1)\times\{0\}$ ó $\{1<x^2+y^2<4\}$ no lo son.

El grupo fundamental de $[-1,1]\times\{0\}$ es trivial y el grupo fundamental de S^1 es $\mathbb{Z}$.

S^1 es compacto y $[-1,1)\times\{0\}$ ó $\{1<x^2+y^2<4\}$ no lo son.

Finalmente, $[-1,1)\times\{0\}$ y $\{1<x^2+y^2<4\}$ tienen distinto grupo fundamental (trivial y $\mathbb{Z}$, respectivamente).

b) $X=[-1,1]$, $Y=(-1,1)$.

$X'=(-1,1)\subset X$ es homeomorfo a Y.

$Y'=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subset Y$ es homeomorfo a X.