Ejercicios de Topología

1. Espacios métricos. Bolas y esferas

1. Estudia si $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibuja la bola $B(x,r)$ cuando **i)** $x = 0$ y $r = 1/2$; **ii)** $x = 1/2$ y $r = 1$.

2. Demuestra que si d es una distancia entonces $d'(x,y) = \min(d(x,y), 1)$ también lo es.

3. Decide razonadamente si

i) $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ define una métrica en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ii) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ define una métrica en $\mathbb{R}$.

4. Demuestra la *desigualdad triangular inversa*: en un espacio métrico (X, d),

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

5. Dado un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}$ la colección de todos sus subconjuntos finitos. Para $A \in \mathcal{F}$, sea $|A|$ el número de elementos de A.

i) Comprueba que

$$d(A,B) = |A \Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)|$$

define una métrica en $\mathcal{F}$.

ii) Sea $\mathcal{F}$, concretamente, la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Para la métrica descrita en el apartado anterior y el punto $A = \{1, 2\}$ en el espacio $\mathcal{F}$, describe la esfera $S(A, 1) = \{B \in \mathcal{F} : \ d(A,B) = 1\}$.

6. Comprueba que los siguientes espacios de sucesiones con las distancias asociadas son espacios métricos:

i) $\mathbb{R}^\omega$ es el espacio de sucesiones de números reales $x = (x_n)$, y $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ la distancia

$$d(x,y) \ = \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \qquad x \in \mathbb{R}^\omega, \quad y \in \mathbb{R}^\omega$$

¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1 - 2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?

ii) ℓ_∞ es el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales, y $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ la función

$$d(x,y) \ = \ \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

iii) ℓ_2 es el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ de $\mathbb{R}$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$; y $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ la función

$$d(x,y) \ = \ \left(\sum_n |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$$

Indicación: Si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

7. Si (X, d) es un espacio métrico y D la función definida en $(X \times X) \times (X \times X)$ por

$$D((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = d(x_1, x_1') + d(x_2, x_2'),$$

comprueba que D es una métrica. Demuestra que la función distancia $d\colon (X \times X, D) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua.

8. En $\mathbb{R}^n$ se define $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Demuestra que d_1 es una distancia en $\mathbb{R}^n$. Si d_2 es la distancia usual (euclídea) de $\mathbb{R}^n$ demuestra que

$$\forall r > 0, \exists r' > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R}^n, B_1(x, r') \subset B_2(x, r) \text{ y } B_2(x, r') \subset B_1(x, r)$$

donde B_i denota la bola abierta definida por la distancia d_i $(i = 1, 2)$.

2. Interior, adherencia, frontera y derivado en espacios métricos

9. ¿Es cierto que en cada espacio métrico, el cierre de la bola abierta $B(a,r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(a,r)$?

10. Se considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$\mathsf{A} = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, 3\right) \cup \left\{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

Halla $\mathring{\mathsf{A}}$, $\overline{\mathsf{A}}$ y A' en las siguientes métricas sobre $\mathbb{R}$:

i) La usual.

ii) La discreta.

iii) La métrica dada por la fórmula $d(x,y) = \text{mín}\{|x-y|, 1\}$.

Indicación: Conviene comparar los conjuntos abiertos en esta métrica con los la usual.

11. Halla un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que, con la métrica usual de $\mathbb{R}$, tenga como frontera el conjunto dado:

$\partial\,\mathsf{A} = [1,2] \cup \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

12. Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, se pide hallar su frontera y decidir si es abierto o cerrado.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 4\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 3\}.$

13. Determina los conjuntos A' y $\overline{A}$ para $A = \{(0,2)\} \cup ([0,1] \times [0,1)) \subset \mathbb{R}^2$.

14. Sea $U \subset \mathbb{R}^N$ conjunto abierto y $A \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto tal que $U \subset A$. Demuestra que $U \subset \mathring{A}$. Enuncia y demuestra la afirmación análoga para conjuntos cerrados.

15. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dotado de la métrica euclídea. Sea x un punto de acumulación de $A \bigcup B$. ¿Se puede concluir que x es un punto de acumulación de A o de B?

16. Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestra que si A es un subconjunto finito de X, entonces A no tiene puntos de acumulación; es decir $\mathsf{A}' = \varnothing$.

17. Si (X,d) es un espacio métrico, $A \subset X$ y $a \in X$, se define $d(a,A) = \text{ínf}\,\{d(a,x) :\ x \in A\}$.

i) Demuestra que $d(a,A) = 0$ si y sólo si $a \in \overline{A}$.

ii) Para $\alpha \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, definamos $B_\alpha(A) = \{x \in X : d(x,A) < \alpha\}$. Prueba que $\forall \alpha > 0, \beta > 0$ se cumple la inclusión

$$B_\alpha(B_\beta(A)) \subset B_{\alpha+\beta}(A)$$

pero que la igualdad no es necesariamente cierta.

3. Convergencia de sucesiones y funciones continuas en espacios métricos

18. Si en un espacio métrico (X,d) se cumple que $x_n \to x$, $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$, demuestra que entonces $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

19. Sean X e Y dos espacios métricos y $f, g :\ X \to Y$ dos funciones continuas.

i) Demuestra que $\{x \in X :\ f(x) = g(x)\}$ es un subonjunto cerrado de X.

ii) Si, además, $A \subset X$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, demuestra que, de hecho, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A}$. (Se recomienda hacerlo de dos maneras distintas: directamente por sucesiones y deduciéndolo del apartado anterior.)

20. Sea (X,d) un espacio métrico y $a \in X$. Demuestra que la función $f :\ X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x,a)$ es continua (y, de hecho, uniformemente continua).

21. Demuestra que $d(x,y) = \text{mín}(|x-y|, 1 - |x-y|)$ define una distancia en $[0,1)$. ¿Cuáles son las funciones $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ continuas en este espacio?

4. Definición de topología. Ejemplos de topologías

22. Sea X un conjunto y A, B dos subconjuntos propios y no vacíos de X tales que $A \neq B$. Si la colección $\mathcal{T} = \{\varnothing, A, B, X\}$ es una topología de X, ¿que condición deben cumplir A y B?

23. Sean X un conjunto y $a \in X$. Se considera la familia $\mathcal{T}_a$ de los subconjuntos U de X tales que o bien U es vacío, o bien $a \in U$. Decide razonadamente si $\mathcal{T}_a$ es una topología en X.

24. Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología sobre X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demuestra que $\mathcal{T}$ es la topología discreta de X.

25. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada (a, b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \cup \big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big) \subset U.$$

Estudia si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

5. Bases. Subbases

26. Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$: $\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) \colon b \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a, \infty) \colon a \in \mathbb{R}\}$.

i) Demuestra que cada una de las familias $\mathcal{B}_{\leftarrow}$ y $\mathcal{B}_{\rightarrow}$ es una base de una topología de $\mathbb{R}$.

ii) Compara estas topologías.

iii) Demuestra que la topología generada por $\mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ es la usual.

27. Sea $\mathcal{T}_j$, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Demuestra que existe una topología que contiene a todas las $\mathcal{T}_j$, para $j \in J$, y además es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

28. Para cada punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $Q_r(x, y)$:
«cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x, y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x, y)».
Haz un dibujo que ayude a demostrar que $\mathcal{B} = \{Q_r(x, y) \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\}$ es base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

29. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de sendas topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ de un mismo conjunto X, demuéstrese que

$$\mathcal{B} = \{B_1 \cap B_2 \,|\, B_1 \in \mathcal{B}_1,\ B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

es base de una topología más fina que $\mathcal{T}_1$ y que $\mathcal{T}_2$.

30. Encuentra una subbase para la topología discreta en el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que todos sus miembros tengan más de un elemento.

6. Producto de dos espacios topológicos. Subespacios

31. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)})$ (plano de Sorgenfrey), describe la topología inducida en los subconjuntos $X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

32. Sean X e Y espacios topológicos, $\mathsf{A} \subset X \times Y$ y $\mathsf{A}_x = \{y \in Y : (x, y) \in \mathsf{A}\}$, $\mathsf{A}_y = \{x \in X : (x, y) \in \mathsf{A}\}$.

i) Demuestra que si A es abierto en $X \times Y$, entonces, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, A_x y A_y son abiertos en Y y en X respectivamente.

ii) Si A_x y A_y son abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, ¿es A abierto en $X \times Y$?

33. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías $\mathcal{T}_1$ de X y $\mathcal{T}_2$ de Y. Prueba que, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente la «base producto»), entonces $\pi_1(\mathcal{B}) = \{\pi_1(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_1$ y $\pi_2(\mathcal{B}) = \{\pi_2(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_2$. ¿Se puede usar este hecho para resolver el ejercicio anterior?

34. Se considera la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B}$ del ejercicio 28. ¿Existen en $\mathbb{R}$ sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$?
Indicación: De existir, ambas topologías deberían ser menos finas que la usual.

7. Entornos, interior, adherencia, frontera y derivado

35. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $E \subset \mathcal{T}$. Demuestra que E es abierto si y sólo si E es un entorno abierto de cada punto $x \in E$, si y sólo si E es un entorno de cada punto $x \in E$.

36. Comprueba que $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{E_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una topología de $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$, donde $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

i) Halla todos los conjuntos cerrados en la topología $\mathcal{T}$.

ii) Describe todos los entornos abiertos del punto $m \in \mathbb{N}$ en la topología $\mathcal{T}$.

iii) Determina la clausura de los siguientes conjuntos A y D: $\quad \mathsf{A} = \{9, 13, 48, 96\}, \quad \mathsf{D} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.

37. Se considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$: $A = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, 3\right) \cup \left\{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Halla $\mathring{\mathsf{A}}$, $\overline{\mathsf{A}}$ y A' en las siguientes topologías de $\mathbb{R}$:

i) La cofinita.

ii) La topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ de Sorgenfrey (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$).

iii) La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

iv) $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$).

38. Halla dos subconjuntos A, D abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}$ para los que los cuatro subconjuntos $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{D}}$, $\overline{\mathsf{A}} \cap \mathsf{D}$, $\overline{\mathsf{A}} \cap \overline{\mathsf{D}}$ y $\overline{\mathsf{A} \cap \mathsf{D}}$ sean distintos.

39. Sea X un espacio topológico y sean $\mathsf{A}, \mathsf{D} \subset X$. Demuestra que:

i) $\partial\, \mathsf{A} = \overline{\mathsf{A}} \setminus \mathring{\mathsf{A}}$.

ii) $\partial\, \mathsf{A} = \varnothing \quad$ si y sólo si A es simultáneamente abierto y cerrado.

iii) Si A es abierto, entonces $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{D}} \subset \overline{\mathsf{A} \cap \mathsf{D}}$. ¿Se satisface esta inclusión si A no es abierto?

iv) Si $\mathsf{A} \cup \mathsf{D} = X$, entonces $\overline{\mathsf{A}} \cup \mathring{\mathsf{D}} = \mathsf{Int}(\mathsf{A} \cup \overline{\mathsf{D}}) = X$.

v) $\mathring{\mathsf{A}} \cup \mathring{\mathsf{D}} \subset \mathsf{Int}\,(\mathsf{A} \cup \mathsf{D})$. La inclusión anterior puede ser estricta.

vi) Si $\partial\, \mathsf{A} = \mathsf{D}$ y $\partial\, \mathsf{D} = \mathsf{A}$, entonces $\mathsf{A} = \mathsf{D}$.

vii) $\partial(\mathsf{A} \cup \mathsf{D}) \subset \partial(\mathsf{A}) \cup \partial(\mathsf{D})$ y la inclusión es estricta en general (busca un ejemplo sencillo).

viii) Si $\quad \overline{\mathsf{A}} \cap \overline{\mathsf{D}} = \varnothing$, entonces $\partial(\mathsf{A} \cup \mathsf{D}) = \partial(\mathsf{A}) \cup \partial(\mathsf{D})$.

40. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, $\mathsf{Int}\,(\partial\, \mathsf{A}) = \varnothing$.

ii) Si $\mathsf{A} \neq \varnothing$ es cerrado y $\mathring{\mathsf{A}} = \varnothing$, existe D tal que $\mathsf{A} = \partial\, \mathsf{D}$.

iii) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, $\overline{\mathsf{A}} = \overline{\mathsf{Int}\,\mathsf{A}}$.

iv) Si $\mathsf{A} \cap \partial\, \mathsf{A} = \varnothing \quad$ entonces A es abierto.

v) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, el conjunto A' es cerrado.

vi) Si $x \notin \mathsf{A}'$, entonces $x \notin (\overline{\mathsf{A}})'$.

41. Sea X un espacio topológico. Sea $\{\mathsf{A}_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X.

i) Demuestra que

$$\bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}.$$

ii) Demuestra que si I es finito, entonces $\bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}$.

iii) Halla un contraejemplo que muestre que, en general, no es cierto que $\overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i}$.

iv) Busca un fallo en la siguiente demostración —falsa— de la inclusión anterior:
Si $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}$ entonces, para todo entorno U de x, $U \cap (\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i) \neq \varnothing$. Por tanto, $U \cap \mathsf{A}_{i_0} \neq \varnothing$ para algún $i_0 \in I$ y se tiene $x \in \overline{\mathsf{A}_{i_0}}$ y $x \in \bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i}$.

8. Convergencia de sucesiones. Propiedades de separación. Espacios de Hausdorff

42. Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

i) Demuestra que este espacio es T_0 pero no T_1.

ii) Estudia la convergencia de la sucesión $(-n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el espacio dado y observa que el límite de una sucesión no tiene por qué ser único.

43. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología cofinita.

i) Demuestra que este espacio es T_1 pero no T_2 (es decir, no es Hausdorff).

ii) Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales distintos. Demuestra que cada número real es un límite de esta sucesión en la topología cofinita.

44. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_1.

i) Demostrar que si X es finito, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

ii) Demostrar que si A es un subconjunto finito de X, A no tiene puntos de acumulación, es decir $\mathsf{A}' = \varnothing$.

45. Halla la intersección de todas las topologías T_1 de un conjunto X y demuestra que también es una topología con la propiedad T_1.

46. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología conumerable, formada por el conjunto vacío y por los conjuntos cuyo complementario es numerable o finito.

i) Determina razonadamente si esta topología es T_0, T_1, T_2.

ii) Halla el límite o límites (si existen) de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$.

iii) ¿Qué sucesiones tendrán límite? ¿Cuándo será único?

47. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Demuestra que $(X, \mathcal{T})$ es T_2 (es decir, que tiene la propiedad de separación de Hausdorff) si y sólo si el conjunto

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$$

es un cerrado del espacio $X \times X$ con la topología producto.

48. Demuestra las siguientes caracterizaciones.

i) Un espacio topológico X es T_1 si y sólo si para cada punto $x \in X$ se cumple que

$$\{x\} = \cap\{U : U \in \mathcal{V}(x)\}.$$

ii) Un espacio topológico X es Hausdorff (T_2) si y sólo si para cada punto $x \in X$ se cumple que

$$\{x\} = \cap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}.$$

9. Funciones continuas. Homeomorfismos

49. Demuestra que la función identidad: $i(x) = x$, es continua de $(X, \mathcal{T})$ en $(X, \mathcal{T}^*)$ si y sólo si la topología $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}^*$.

50. Sea X un espacio topológico. Demuestra que la función diagonal $d\colon X \to X \times X$ dada por $d(x) = (x, x)$ es continua para la topología producto de $X \times X$.

51. Sean X e Y espacios topológicos.

i) Demuestra que se cumple el siguiente resultado: Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en el espacio producto $X \times X$.

ii) Demuestra que, con las mismas hipótesis del punto anterior, el conjunto

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : \ y = f(x)\},$$

es decir, la «gráfica» de la aplicación f, es un conjunto cerrado de $X \times Y$ con la topología producto.

52. Con la notación del ejercicio anterior:

i) Demuestra que el recíproco de la proposición del primer punto del ejercicio anterior no es cierto en general. Es decir, que K puede ser cerrado sin que Y sea Hausdorff.

ii) Demuestra que, sin embargo, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta y suprayectiva, y el conjunto

$$K = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$$

es cerrado en el espacio producto $X \times X$, entonces Y es Hausdorff.

53. Sea $X = [0, 1]$ con la topología usual e $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico. Estudia si las siguientes funciones son continuas.

i) $f\colon X \to Y$ dada por $f(t) = (t, t)$

ii) $g\colon X \to Y$ dada por $g(t) = (1/2, (2t+1)/4)$

iii) $h\colon X \to Y$ dada por $h(t) = (t, 1)$.

54. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestra que cada uno de los intervalos $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ en la recta, dotados de la topología relativa, es homeomorfo a $\mathbb{R}$, mostrando los homeomorofismos pertinentes.

55. Demuestra que el disco unidad $\mathbb{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ (dotado de la topología relativa del plano) es homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$, exhibiendo un homeomorfismo explícito.

Indicación: Conviene usar las coordenadas polares.

56. Estudia si $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{(\,]}$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

57. Demuestra que los espacios $X = [0, 2) \cup [4, 5]$ e $Y = [0, 3]$, ambos con la topología del orden, son homeomorfos.

58. Sea $\mathsf{A} = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : \mathsf{A} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Demuestra que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que es un homeomorfismo sólo con la primera de ellas.

59. Da un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea.

Indicación: Piensa en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.

60. Prueba que existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{N}$ con la topología discreta que son sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{R}$ con la topología discreta que tengan tales propiedades.

Indicación: La imagen inversa de $\mathbb{R}$ sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a, b)$ contiene siempre un número racional.

10. Topología producto

61. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una colección de espacios topológicos.

i) Demuestra que, en general, el producto cualquiera de abiertos no es abierto en la topología producto.

ii) Demuestra que el producto cualquiera de cerrados es un cerrado en la topología producto.

iii) Demuestra que, en la topología producto, $\Pi_{\alpha\in A}\overline{E_\alpha} = \overline{\Pi_{\alpha\in A}E_\alpha}$.

62. Demuestra que una sucesión converge en la topología producto si y sólo si converge en cada una de sus componentes.

63. Para para cada $n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$, sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo (con la topología usual de $\mathbb{R}$). Se define $f : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ por medio de $(x_n) \mapsto (f_n(x_n))$. Demuestra que f es un homeomorfismo respecto de las topologías producto usuales de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

64. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada α, sea $\varnothing \neq Y_\alpha \subset X_\alpha$. Demuestra que la topología relativa de la topología producto de $\Pi_\alpha X_\alpha$ coincide con la topología producto en $\Pi_\alpha Y_\alpha$ de las topologías relativas.

65. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. Sea $A = A_1 \cup A_2$ una partición de A. Demuestra que los espacios topológicos

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \qquad \text{y} \qquad \left(\prod_{\alpha\in A_1} X_\alpha\right) \times \left(\prod_{\alpha\in A_2} X_\alpha\right),$$

dotados en cada uno de los casos con las topologías producto correspondientes, son homeomorfos.

66. Demuestra que el producto de espacios topológicos es Hausdorff es Hausdorff. ¿Es cierto es recíproco?

11. Aplicaciones abiertas y cerradas. Topología cociente

67. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre el primer factor.

i) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea g la restricción de π_1 a X. Demuestra que g es una aplicación cerrada pero que no es una aplicación abierta.

ii) Sea Y el subespacio $(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea h la restricción de π_1 a Y. Demuestra que la aplicación h no es ni abierta ni cerrada, pero sí es una aplicación cociente.

Indicación: $h^{-1}(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = U \times \{0\}$.

68. Sea $p : X \to Y$ una aplicación y sea A un subespacio de X.

i) Demuestra que si A es abierto en X y p es una aplicación abierta, entonces la restricción de p a A es una aplicación abierta

ii) Concluye del apartado anterior que $p' : A \to p(A)$ definida por $p'(x) := p(x)$ es una aplicación abierta.

iii) Demuestra que si A y p son cerrados, la restricción de p a A es cerrada, luego la aplicación p' del apartado anterior también lo es.

69. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual.

i) Se define la relación de equivalencia sobre X:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \quad \text{si y solamente si} \quad x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$

Identifica el espacio topológico cociente $X/_\sim$ con alguno conocido.

ii) Repite el apartado anterior para la relación de equivalencia

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \quad \text{si y solamente si} \quad x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

70. Sea Z el subespacio $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ la aplicación dada por

$$g(x, y) = (x, 0) \quad \text{si} \quad x \neq 0; \qquad g(0, y) = (0, y).$$

i) Estudia si la aplicación g es continua, si es abierta y si es cerrada.

ii) Demuestra que la topología cociente inducida en Z por g no es Hausdorff.

12. Conexión

71. **i)** Prueba que si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo entonces, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$, $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ también son homeomorfos. Aplica lo anterior para demostrar que los subconjuntos de $\mathbb{R}$: $(1,2)$, $[1,2]$ y $[1,2)$ no son homeomorfos.

ii) Prueba que un espacio X es conexo si y sólo si no existe ninguna aplicación continua y sobreyectiva $f : X \longrightarrow Y$ donde $Y = \{0,1\}$ con la topología discreta.

iii) Usa el apartado anterior para probar que si S es un subconjunto conexo de un espacio X y K satisface $S \subset K \subset \overline{S}$ entonces K es conexo.

iv) Sea A un intervalo abierto y B un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Demuestra que A y B no pueden ser homeomorfos.

72. **i)** Sean A y D dos conjuntos cerrados no vacíos de un espacio topológico X. Demuestra que si $\mathsf{A} \cup \mathsf{D}$ y $\mathsf{A} \cap \mathsf{D}$ son conexos entonces A y D también lo son. ¿Qué pasa si A o D no son cerrados?

ii) Sean $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$ subconjuntos conexos de un espacio topológico tales que $\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1} \neq \varnothing$ para todo $1 \leq k < n$. Prueba que $\bigcup_{k=1}^n \mathsf{A}_k$ es conexo. Trata de generalizar el resultado para una colección numerable de conexos.

73. Demuestra que si X e Y son conexos y A, B son subconjuntos propios no vacíos de X e Y respectivamente entonces $X \times Y \setminus \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ es conexo. En la situación anterior, ¿es cierto que si X e Y son conexos por caminos entonces $X \times Y \setminus \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ también lo es?

74. **i)** Demuestra que si A es numerable entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \mathsf{A}$ es conexo por caminos. Indicación: El conjunto de rectas que pasan por un punto no es numerable.

ii) Demuestra que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto es no numerable.

iii) Demuestra que $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$. ¿Son $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^2$ homeomorfos?

iv) Sean $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ y $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$. ¿Existe alguna función continua y suprayectiva de X en $\mathbb{S}^1$? ¿Y si se pide además que sea biyectiva?

v) Sea $S = \{(r\cos t, r\sin t) \mid r = 1 - \frac{1}{t},\, t \geq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Demuestra que, con la topología usual del plano, $X = S \cup \mathbb{S}^1$ es conexo pero no es conexo por caminos.

75. Estudia si $X = [0,1] \times [0,1]$ es conexo con:

i) La topología del orden lexicográfico en X.

ii) La topología heredada de $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico.

76. **i)** Caracteriza todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.

ii) Demuestra que las componentes conexas de $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey son los puntos.

77. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Si X es conexo por caminos y $\exists f\colon X \to Y$ continua y suprayectiva entonces Y también es conexo por caminos.

ii) Si A es un conexo por caminos de un espacio topológico X y $\mathsf{A} \subset \mathsf{D} \subset \overline{\mathsf{A}}$ entonces D es conexo por caminos.

iii) Si $\mathcal{C} = \{\mathsf{C}_i \colon i \in I\}$ es una colección de subconjuntos conexos por caminos de un espacio topológico X tal que existe $\mathsf{C}_0 \in \mathcal{C}$ que interseca a cada elemento de $\mathcal{C}$, entonces $\bigcup_{i \in I} \mathsf{C}_i$ es conexo por caminos.

iv) Si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en cualquier intervalo, entonces es necesariamente continua.

13. Compacidad

78. Estudia si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican.

i) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

iii) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior $\mathcal{T}_{[\,)}$.

iv) $[0,1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico.

79. Halla un recubrimiento de $[0,1]$ por intervalos cerrados que no admita ningún subrecubrimiento finito. Halla un recubrimiento de $(0,1)$ por intervalos abiertos que no admita subrecubrimiento finito.

80. Si un espacio es compacto con cierta topología, ¿lo será con una menos fina? ¿Y con una más fina?

81. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) La unión finita de subconjuntos compactos de un espacio es un subconjunto compacto.

ii) La unión de una familia cualquiera de compactos de un espacio es un subconjunto compacto.

iii) La intersección de una familia cualquiera de compactos es un subconjunto compacto.
Indicación: Considera en $[0,1]$ la topología cuya base es $\mathcal{B} = \{(a,b) : 0 < a < b < 1\} \cup \{(0,1]\} \cup \{[0,1)\}$.

iv) La intersección de una familia de compactos de un espacio de Hausdorff es un subconjunto compacto.

82. Decide cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.

83. Demuestra que los conjuntos compactos en la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ son necesariamente numerables.
Indicación: Usa el hecho de que en un conjunto no numerable hay siempre una sucesión estrictamente creciente.

84. ¿Son $[0,1]\times[0,1]$ y $[0,1)\times[0,1]$ espacios compactos con la topología del orden lexicográfico? ¿Son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico?

85. Prueba que si X es un espacio compacto y $\mathsf{A} \subset X$ entonces $\bar{\mathsf{A}}$ es compacto. Demuestra también que $\mathcal{B} = \{\{0,n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{Z}$ en la que $\mathsf{A} = \{0\}$ es compacto pero $\bar{\mathsf{A}}$ no lo es. ¿Contradice esto lo anterior?

86. Demuestra que si X es compacto, Y es Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua entonces f es cerrada. Concluye que si f es además biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

87. Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto compacto. Demuestra que la función $d(x,K) = \inf\{d(x,y) : y \in K\}$ es continua y que para cada $x \in X$ existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$.

88. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Prueba que la función distancia está acotada.

89. Sean $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < 1\}$, $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1\}$. Demuestra que X_1 es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y que X_1 y X_2 no son homeomorfos.

90. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^2$ no son homeomorfos.

91. Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 = y^2,\ x,y \in [-1,1]\}$, con la topología usual. ¿Existe alguna función continua y suprayectiva de X en $\mathbb{R}$?

92. Demuestra que si Y es compacto entonces $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada. Da un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ cuyas proyecciones sean compactas. Indicación: Si A es cerrado y $x \notin \pi_1(A)$, hallamos un «tubo» $T = U_x \times Y$ tal que $T \cap A = \varnothing$.

93. Sea X un espacio topológico e Y un espacio de Hausdorff compacto. Probar que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la gráfica de f, Γ_f, es cerrada en $X \times Y$. Si X es también un espacio de Hausdorff compacto, entonces f es continua si y sólo si Γ_f es compacta. Indicación: Demuestra que para todo C cerrado de Y, $f^{-1}(C) = \pi_1\big((X \times C) \cap \Gamma_f\big)$ y luego usa el ejercicio anterior.

94. Sea X un espacio compacto.

i) Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X en $[0,1]$ tales que si $f,g \in \mathcal{F}$ entonces $fg \in \mathcal{F}$, y para cada $x \in X$ existe $f \in \mathcal{F}$ y un entorno U_x con $f(U_x) = 0$. Probar que $\mathcal{F}$ contiene a la función nula.

ii) Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}^+$ tales que si $f,g \in \mathcal{F}$ entonces existe $h \in \mathcal{F}$ con $h \leq \min(f,g)$, y para todo $x \in X$, $\inf\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} = 0$. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

95. Demuestra que si $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de bolas cerradas encajadas de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j \neq \varnothing\,.$$

14. Axiomas de numerabilidad. Espacios separables.

96. Si un espacio es IAN con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina?

97. Si un espacio es IIAN con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina?

98. Se considera el espacio $(X, \mathcal{T}_{\mathsf{cofinita}})$. ¿Es un espacio separable?

99. Demuestra que si en un espacio topológico X, un conjunto A y su complementario son densos (esto es, $\overline{\mathsf{A}} = \overline{X \setminus \mathsf{A}} = X$), entonces $\mathring{\mathsf{A}} = \mathsf{Int}\,(X \setminus \mathsf{A}) = \varnothing$. ¿Es cierto el recíproco?

100. Sea X un espacio IAN. Sean $A \subset X$ y $x \in X$. Demuestra lo siguiente:

i) $x \in \partial(A)$ si y solamente si existen $(x_n)_{n>0} \subset A$ y $(y_n)_{n>0} \subset X \setminus A$ ambas con límite x.

ii) $x \in A'$ si y solamente si existe $(x_n)_{n>0} \subset A$ con $x_n \neq x$ para todo $n > 0$ y con límite x.

101. Probar que si un espacio topológico X es separable (es decir, existe $A \subset X$ tal que $\bar{A} = X$) entonces toda familia de abiertos disjuntos es numerable.

102. Prueba que si un espacio topológico es IIAN entonces es separable. Busca un contraejemplo que demuestre que el recíproco es, en general, falso, pero es cierto en el caso particular de los espacios métricos.

103. Prueba que si un espacio topológico es IIAN entonces cualquier unión de abiertos $U = \cup_{i \in I} U_i$ se puede expresar como una unión numerable, esto es, $U = \cup_{n \in \mathbb{N}} U_{i_n}$ con $i_n \in I$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (esta propiedad se llama «de Lindelof»). Usa esto para probar que si un espacio es IIAN entonces cualquier base contiene una base numerable. Esto último puede servir para probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[[})$ no es IIAN.

15. Espacios metrizables

104. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico es un espacio metrizable; es decir, que existe una métrica en este espacio que genera la misma topología.

Indicación: Estudia la función $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$d(<x_1, x_2>, <y_1, y_2>) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ \max\{1, |x_2 - y_2|\} & \text{si } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

y describe las ϵ-bolas con respecto a d, para $\epsilon \leq 1$.

105. Halla una función continua y biyectiva del intervalo abierto $(-1, 1)$ en el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+1)^2 + y^2 = 1\},$$

ambos con la topología usual. (Más adelante sabremos demostrar que estos espacios no son homeomorfos.)