8. Convergencia de sucesiones. Propiedades de separación. Espacios de Hausdorff

42. Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

i) Demuestra que este espacio es T_0 pero no T_1.

ii) Estudia la convergencia de la sucesión $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio dado y observa que el límite de una sucesión no tiene por qué ser único.

43. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología cofinita.

i) Demuestra que este espacio es T_1 pero no T_2 (es decir, no es Hausdorff).

ii) Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales distintos. Demuestra que cada número real es un límite de esta sucesión en la topología cofinita.

44. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_1.

i) Demostrar que si X es finito, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

ii) Demostrar que si A es un subconjunto finito de X, A no tiene puntos de acumulación, es decir $\mathsf{A}' = \varnothing$.

45. Halla la intersección de todas las topologías T_1 de un conjunto X y demuestra que también es una topología con la propiedad T_1.

46. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología conumerable, formada por el conjunto vacío y por los conjuntos cuyo complementario es numerable o finito.

i) Determina razonadamente si esta topología es T_0, T_1, T_2.

ii) Halla el límite o límites (si existen) de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$.

iii) ¿Qué sucesiones tendrán límite? ¿Cuándo será único?

47. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Demuestra que $(X, \mathcal{T})$ es T_2 (es decir, que tiene la propiedad de separación de Hausdorff) si y sólo si el conjunto

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$$

es un cerrado del espacio $X \times X$ con la topología producto.

48. Demuestra las siguientes caracterizaciones.

i) Un espacio topológico X es T_1 si y sólo si para cada punto $x \in X$ se cumple que

$$\{x\} = \cap\{U : U \in \mathcal{V}(x)\}.$$

ii) Un espacio topológico X es Hausdorff (T_2) si y sólo si para cada punto $x \in X$ se cumple que

$$\{x\} = \cap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}.$$