Ejercicios de Topología, UAM 2018-19

4. Definición de topología. Ejemplos de topologías

22. Sea X un conjunto y A, B dos subconjuntos propios y no vacíos de X tales que $A \neq B$. Si la colección $\mathcal{T} = \{\varnothing, A, B, X\}$ es una topología de X, ¿que condición deben cumplir A y B?

23. Sean X un conjunto y $a \in X$. Se considera la familia $\mathcal{T}_a$ de los subconjuntos U de X tales que o bien U es vacío, o bien $a \in U$. Decide razonadamente si $\mathcal{T}_a$ es una topología en X.

24. Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología sobre X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demuestra que $\mathcal{T}$ es la topología discreta de X.

25. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada (a, b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \cup \big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big) \subset U.$$

Estudia si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

5. Bases. Subbases

26. Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$: $\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) \colon b \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a, \infty) \colon a \in \mathbb{R}\}$.

i) Demuestra que cada una de las familias $\mathcal{B}_{\leftarrow}$ y $\mathcal{B}_{\rightarrow}$ es una base de una topología de $\mathbb{R}$.

ii) Compara estas topologías.

iii) Demuestra que la topología generada por $\mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ es la usual.

27. Sea $\mathcal{T}_j$, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Demuestra que existe una topología que contiene a todas las $\mathcal{T}_j$, para $j \in J$, y además es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

28. Para cada punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $Q_r(x, y)$:
«cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x, y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x, y)».
Haz un dibujo que ayude a demostrar que $\mathcal{B} = \{Q_r(x, y) \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\}$ es base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

29. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de sendas topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ de un mismo conjunto X, demuéstrese que

$$\mathcal{B} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1,\ B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

es base de una topología más fina que $\mathcal{T}_1$ y que $\mathcal{T}_2$.

30. Encuentra una subbase para la topología discreta en el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que todos sus miembros tengan más de un elemento.

6. Producto de dos espacios topológicos. Subespacios

31. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)})$ (plano de Sorgenfrey), describe la topología inducida en los subconjuntos $X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

32. Sean X e Y espacios topológicos, $\mathsf{A} \subset X \times Y$ y $\mathsf{A}_x = \{y \in Y : (x, y) \in \mathsf{A}\}$, $\mathsf{A}_y = \{x \in X : (x, y) \in \mathsf{A}\}$.

i) Demuestra que si A es abierto en $X \times Y$, entonces, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, A_x y A_y son abiertos en Y y en X respectivamente.

ii) Si A_x y A_y son abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, ¿es A abierto en $X \times Y$?

33. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías $\mathcal{T}_1$ de X y $\mathcal{T}_2$ de Y. Prueba que, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente la «base producto»), entonces $\pi_1(\mathcal{B}) = \{\pi_1(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_1$ y $\pi_2(\mathcal{B}) = \{\pi_2(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_2$. ¿Se puede usar este hecho para resolver el ejercicio anterior?

34. Se considera la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B}$ del ejercicio 28. ¿Existen en $\mathbb{R}$ sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$?
Indicación: De existir, ambas topologías deberían ser menos finas que la usual.

7. Entornos, interior, adherencia, frontera y derivado

35. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $E \subset \mathcal{T}$. Demuestra que E es abierto si y sólo si E es un entorno abierto de cada punto $x \in E$, si y sólo si E es un entorno de cada punto $x \in E$.

36. Comprueba que $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{E_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una topología de $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$, donde $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

i) Halla todos los conjuntos cerrados en la topología $\mathcal{T}$.

ii) Describe todos los entornos abiertos del punto $m \in \mathbb{N}$ en la topología $\mathcal{T}$.

iii) Determina la clausura de los siguientes conjuntos A y D: $\mathsf{A} = \{9, 13, 48, 96\}$, $\mathsf{D} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.

37. Se considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$: $A = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, 3\right) \cup \left\{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Halla $\mathring{\mathsf{A}}$, $\overline{\mathsf{A}}$ y A' en las siguientes topologías de $\mathbb{R}$:

i) La cofinita.

ii) La topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ de Sorgenfrey (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$).

iii) La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

iv) $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$).

38. Halla dos subconjuntos A, D abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}$ para los que los cuatro subconjuntos $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{D}}$, $\overline{\mathsf{A}} \cap \mathsf{D}$, $\overline{\mathsf{A}} \cap \overline{\mathsf{D}}$ y $\overline{\mathsf{A} \cap \mathsf{D}}$ sean distintos.

39. Sea X un espacio topológico y sean $\mathsf{A}, \mathsf{D} \subset X$. Demuestra que:

i) $\partial\,\mathsf{A} = \overline{\mathsf{A}} \setminus \mathring{\mathsf{A}}$.

ii) $\partial\,\mathsf{A} = \varnothing$ si y sólo si A es simultáneamente abierto y cerrado.

iii) Si A es abierto, entonces $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{D}} \subset \overline{\mathsf{A} \cap \mathsf{D}}$. ¿Se satisface esta inclusión si A no es abierto?

iv) Si $\mathsf{A} \cup \mathsf{D} = X$, entonces $\overline{\mathsf{A}} \cup \mathring{\mathsf{D}} = \mathsf{Int}(\mathsf{A} \cup \overline{\mathsf{D}}) = X$.

v) $\mathring{\mathsf{A}} \cup \mathring{\mathsf{D}} \subset \mathsf{Int}\,(\mathsf{A} \cup \mathsf{D})$. La inclusión en el apartado anterior puede ser estricta.

vi) Si $\partial\,\mathsf{A} = \mathsf{D}$ y $\partial\,\mathsf{D} = \mathsf{A}$, entonces $\mathsf{A} = \mathsf{D}$.

vii) $\partial(\mathsf{A} \cup \mathsf{D}) \subset \partial(\mathsf{A}) \cup \partial(\mathsf{D})$ y la inclusión es estricta en general (busca un ejemplo sencillo).

viii) Si $\overline{\mathsf{A}} \cap \overline{\mathsf{D}} = \varnothing$, entonces $\partial(\mathsf{A} \cup \mathsf{D}) = \partial(\mathsf{A}) \cup \partial(\mathsf{D})$.

40. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, $\mathsf{Int}\,(\partial\,\mathsf{A}) = \varnothing$.

ii) Si $\mathsf{A} \neq \varnothing$ es cerrado y $\mathring{\mathsf{A}} = \varnothing$, existe D tal que $\mathsf{A} = \partial\,\mathsf{D}$.

iii) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, $\overline{\mathsf{A}} = \overline{\mathsf{Int}\,\mathsf{A}}$.

iv) Si $\mathsf{A} \cap \partial\,\mathsf{A} = \varnothing$ entonces A es abierto.

v) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, el conjunto A' es cerrado.

vi) Si $x \notin \mathsf{A}'$, entonces $x \notin (\overline{\mathsf{A}})'$.

41. Sea X un espacio topológico. Sea $\{\mathsf{A}_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X.

i) Demuestra que

$$\bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}.$$

ii) Demuestra que si I es finito, entonces $\bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}$.

iii) Halla un contraejemplo que muestre que, en general, no es cierto que $\overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i}$.

iv) Busca un fallo en la siguiente demostración —falsa— de la inclusión anterior:
Si $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}$ entonces, para todo entorno U de x, $U \cap \left(\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i\right) \neq \varnothing$. Por tanto, $U \cap \mathsf{A}_{i_0} \neq \varnothing$ para algún $i_0 \in I$ y se tiene $x \in \overline{\mathsf{A}_{i_0}}$ y $x \in \bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i}$.