Topología — Examen final extraordinario

La calificación final será el mínimo entre 10 y la puntuación obtenida en este examen. Todas las respuestas deben justificarse.

1. (2 puntos)
(a) (1 punto) Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien un contraejemplo sencillo) si es cierta o falsa la siguiente afirmación: «Si X es un espacio topológico y G es un subconjunto abierto no vacío de X entonces $G = (\overline{G})^{\mathrm{o}}$».

(b) (1 punto) Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre dos espacios topológicos y sea Q un subconjunto denso de X. Demuestra que $f(Q)$ es denso en Y. Indica en que punto de la demostración se usa la suprayectividad.

2. (3 puntos)

(a) (1 punto) Recuerda que un espacio topológico X es un *espacio de Lindelöf* si todo recubrimiento de X por abiertos contiene un subrecubrimiento numerable. Demuestra que todo subespacio cerrado de un espacio de *Lindelöf* es también un espacio de *Lindelöf*.

(b) (1 punto) Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien un contraejemplo) si es cierta o falsa la siguiente afirmación: «En un espacio de Hausdorff, la intersección no vacía de compactos es un compacto».

(c) (1 punto) Demuestra que si (X, d) es un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $D(x_1, x_2) = d(x_1, x_2) + |f(x_1) - f(x_2)|$ es también una métrica de X.
¿Es $|f(x_1) - f(x_2)|$ una métrica de X? Da una respuesta razonada.

3. (2 puntos) Considérese el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dotado de la siguiente topología:

$$\mathcal{T} = \Big\{ \varnothing, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\} \Big\} .$$

(a) (1 punto) ¿Cuál de los conjuntos $\{1, 3, 4\}$ y $\{2, 4, 5\}$ es un conjunto conexo en X? Justifica la respuesta.

(b) (1 punto) Determina razonadamente las componentes conexas de X.

4. (2 puntos) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Demuestra que son equivalentes las dos afirmaciones siguientes:
1. Todo punto de X tiene una base de entornos cerrados.
2. $\forall$ cerrado $F \subset X$, $\forall x \in X \setminus F$, $\exists$ abiertos no vacíos G_1, G_2 tales que $F \subset G_1$, $x \in G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.
[Una familia $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de entornos de x es una base de entornos (de x) si para todo abierto G, tal que $x \in G$, existe $\alpha \in A$ tal que $V_\alpha \subset G$.]

5. (2 puntos)
(a) (1 punto) Clasifica razonadamente los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ según su clase de homeomorfía (dos subespacios están en la misma clase si son homeomorfos).

$$[-1, 1] \times \{0\}; \qquad [-1, 1) \times \{0\}; \qquad (-1, 1] \times \{0\}; \qquad \mathbb{S}^1; \qquad \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

[El espacio $\mathbb{S}^1$ es el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología heredada de la usual de $\mathbb{R}^2$.]

(b) (1 punto) Da un ejemplo sencillo de dos espacios topológicos X e Y que no sean homeomorfos y que cada uno de ellos sea homeomorfo a un subespacio del otro.