Cincuenta Aniversario 1968 2018 UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... **Topología** .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....**23 de enero de 2018**..............

La puntuación máxima del examen es de 12 puntos. La calificación del examen será el mínimo entre 10 y el número de puntos obtenido.

1.

(a) (1 punto) Sea X un espacio topológico y $\mathsf{A}, \mathsf{B} \subset X$. Demuestra que si $\overline{\mathsf{A}} \cup \mathsf{B} = X$ entonces $\overline{\mathsf{A}} \cup \mathring{\mathsf{B}} = X$.

(b) (1 punto) Sea X un espacio métrico y $\mathsf{A} \subset X$. Para todo $x \in X$, se define $d(x, \mathsf{A}) = \inf\{d(x,y) \mid y \in \mathsf{A}\}$. Demuestra que $x \in \overline{\mathsf{A}} \Leftrightarrow d(x, \mathsf{A}) = 0$.

(c) (1 punto) Demuestra que la intersección de dos subconjuntos densos y abiertos en un espacio topológico también es un subconjunto denso.

2. Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien dando un contraejemplo sencillo) si es cierta o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) (1 punto) Si $\overline{A} \cup B = X$ entonces $A \cup \overline{B} = X$.

(b) (1 punto) Si $f : X \to \mathbb{S}^1$ es continua y suprayectiva entonces X es compacto.

(c) (1 punto) El espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología conumerable (un subconjunto propio es abierto si su complementario es numerable o finito) es Lindelöf.

3. Sea $\mathsf{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], y \in [0, 1]\}$. Halla (no es necesario justificar la respuesta) $\overline{\mathsf{A}}$, $\mathring{\mathsf{A}}$, $\overline{\mathring{\mathsf{A}}}$, y $\mathring{\overline{\mathsf{A}}}$,

(a) (1 punto) con la topología usual de $\mathbb{R}^2$;

(b)(1 punto) con la topología del orden lexicográfico de $\mathbb{R}^2$;

4.

(a) (1 punto) Demuestra que la imagen por una aplicación abierta e inyectiva de un espacio topológico de Hausdorff es otro espacio de Hausdorff.

(b) (1 punto) Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue:

$$f(x, y) = (x, y) \quad \text{si } x < 0, \qquad f(x, y) = (x, 0) \quad \text{si } x \geq 0.$$

Decide razonadamente si f es una aplicación abierta y si es continua.

5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ (dotado de la topología usual): la circunferencia unidad $\mathsf{A} = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ y el cilindro finito $\mathsf{B} = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

(a) (1 punto) ¿Son A y B homeomorfos? Razona la respuesta.

(b) (1 punto) ¿Son isomorfos sus grupos fundamentales? Determínalos razonadamente.