Ejercicios de Topología

4. Producto de dos espacios topológicos. Subespacios.

21. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)})$ (plano de Sorgenfrey), describe la topología inducida en los subconjuntos

i) $X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$; **ii)** $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

22. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $\mathsf{A} \subset X \times Y$. Sean

$\mathsf{A}_x = \{y \in Y : (x, y) \in \mathsf{A}\}$ y $\mathsf{A}_y = \{x \in X : (x, y) \in \mathsf{A}\}$.

i) Demuestra que si A es abierto en $X \times Y$, entonces, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, A_x y A_y son abiertos en Y y en X respectivamente.

ii) Si A_x y A_y son abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, ¿es A abierto en $X \times Y$?

23. Se considera la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B}$ del ejercicio 19[*] ¿Existen en $\mathbb{R}$ sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$?
Indicación: De existir, ambas topologías deberían ser menos finas que la usual.

24. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías $\mathcal{T}_1$ de X y $\mathcal{T}_2$ de Y. Prueba que, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente la «base producto»), entonces $\pi_1(\mathcal{B}) = \{\pi_1(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_1$ y $\pi_2(\mathcal{B}) = \{\pi_2(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_2$. ¿Se puede usar este hecho para resolver el ejercicio anterior?

5. Interior, adherencia, frontera y derivado.

25. Comprueba que $\mathcal{T} = \varnothing \cup \{E_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ es una topología de $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$, donde $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

i) Halla todos los conjuntos cerrados en la topología $\mathcal{T}$.

ii) Determina la clausura de los siguientes conjuntos A y D: $\mathsf{A} = \{9, 13, 48, 96\}$, $\mathsf{D} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.

iii) Identifica todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son densos en $\mathbb{N}$.

26. Se considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$\mathsf{A} = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, 3\right) \cup \left\{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

Halla $\mathring{\mathsf{A}}$, $\overline{\mathsf{A}}$ y A' en las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$:

i) La usual.

ii) La cofinita.

iii) La topología $\mathcal{T}_{[)}$ de Sorgenfrey (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[\, a, b\,) : a, b \in \mathbb{R}\}$).

iv) La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[\, a, b\,) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

v) $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a\,) : a \in \mathbb{R}\}$).

27. Halla un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que, con la topología usual de $\mathbb{R}$, tenga

$\partial\, \mathsf{A} = [1, 2] \cup \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

28. Halla dos subconjuntos A, D abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}$ para los que los cuatro subconjuntos $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{D}}$, $\overline{\mathsf{A}} \cap \mathsf{D}$, $\overline{\mathsf{A}} \cap \overline{\mathsf{D}}$ y $\overline{\mathsf{A} \cap \mathsf{D}}$ sean distintos.

29. Sea X un espacio topológico y sean $\mathsf{A}, \mathsf{D} \subset X$. Demuestra que:

i) $\partial\, \mathsf{A} = \overline{\mathsf{A}} \setminus \mathring{\mathsf{A}}$.

ii) $\partial\, \mathsf{A} = \varnothing$ si y sólo si A es simultáneamente abierto y cerrado.

iii) Si $\overline{\mathsf{A}} \cap \overline{\mathsf{D}} = \varnothing$ entonces $\partial(\mathsf{A} \cup \mathsf{D}) = \partial(\mathsf{A}) \cup \partial(\mathsf{D})$.

---

[*] Para cada punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ y cada número real $r > 0$ se considera el conjunto $Q_r((x, y))$: cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x, y) y de lado $2r$, del que se han excluido los lados y los puntos de las diagonales a excepción del punto (x, y). $\mathcal{B} = \{Q_r((x, y)) \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$.

iv) Si A es abierto, entonces $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{D}} \subset \overline{\mathsf{A} \cap \mathsf{D}}$. ¿Se satisface esta inclusión si A no es abierto?

v) Si $\mathsf{A} \cup \mathsf{D} = X$, entonces $\overline{\mathsf{A}} \cup \mathring{\overline{\mathsf{D}}} = \mathsf{Int}(\mathsf{A} \cup \overline{\mathsf{D}}) = X$.

vi) $\mathring{\mathsf{A}} \cup \mathring{\mathsf{D}} \subset \mathsf{Int}\,(\mathsf{A} \cup \mathsf{D})$. La inclusión en el apartado anterior puede ser estricta.

vii) Si $\partial\,\mathsf{A} = \mathsf{D}$ y $\partial\,\mathsf{D} = \mathsf{A}$, entonces $\mathsf{A} = \mathsf{D}$.

30. Demuestra que si en un espacio topológico X, un conjunto A y su complementario son densos (esto es, $\overline{\mathsf{A}} = \overline{X \setminus \mathsf{A}} = X$), entonces $\mathring{\mathsf{A}} = \mathsf{Int}\,(X \setminus \mathsf{A}) = \varnothing$. ¿Es cierto el recíproco?

31. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, $\mathsf{Int}\,(\partial\,\mathsf{A}) = \varnothing$.

ii) Si $\mathsf{A} \neq \varnothing$ es cerrado e $\mathring{\mathsf{A}} = \varnothing$, existe D tal que $\mathsf{A} = \partial\,\mathsf{D}$.

iii) Si $\mathring{\mathsf{A}} \neq \varnothing$, entonces $(\mathring{\overline{\mathsf{A}}}) \neq \varnothing$.

iv) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, $\overline{\mathsf{A}} = \overline{\mathring{\mathsf{A}}}$.

v) Si $\mathsf{A} \cap \partial\,\mathsf{A} = \varnothing$ entonces A es abierto.

vi) Para cada $\mathsf{A} \subset X$, el conjunto A' es cerrado.

vii) Si $x \notin \mathsf{A}'$, entonces $x \notin (\overline{\mathsf{A}})'$.

32. Sea X un espacio topológico. Sea $\{\mathsf{A}_i \colon i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X.

i) Demuestra que

$$\bigcup_{i\in I} \overline{\mathsf{A}_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i}.$$

ii) Demuestra que si I es finito, entonces $\bigcup_{i\in I} \overline{\mathsf{A}_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i}$.

iii) Halla un contraejemplo que muestre que, en general, no es cierto que $\overline{\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i} \subset \bigcup_{i\in I} \overline{\mathsf{A}_i}$.

iv) Busca un fallo en la siguiente demostración —falsa— de la inclusión anterior:
Si $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i}$ entonces, para todo entorno U de x, $U \cap (\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i) \neq \varnothing$. Por tanto, $U \cap \mathsf{A}_{i_0} \neq \varnothing$ para algún $i_0 \in I$ y se tiene $x \in \overline{\mathsf{A}_{i_0}}$ y $x \in \bigcup_{i\in I} \overline{\mathsf{A}_i}$.

6. Propiedad de separación de Hausdorff

33. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Demuestra que $(X, \mathcal{T})$ es T_2 (es decir, que tiene la propiedad de separación de Hausdorff) si y sólo si el conjunto

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$$

es un cerrado del espacio $X \times X$ con la topología producto.

34. Estudiar la convergencia de la sucesión $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$) y observar que el límite de una sucesión no tiene por qué ser único cuando el espacio no es Hausdorff. Por otro lado, aunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\leftarrow})$ no es Hausdorff, sí que posee cierta propiedad de separación que se pide descubrir y enunciar.

35. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_1.

i) Demostrar que si X es finito, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

ii) Demostrar que si A es un subconjunto finito de X, A no tiene puntos de acumulación, es decir $\mathsf{A}' = \varnothing$.

iii) Enunciar una caracterización para los espacios métricos con un número finito de elementos que venga expresada en términos de su topología.

36. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología formada por los conjuntos cuyo complementario es numerable (o finito, o vacío) conjuntamente con el conjunto vacío.

i) Determina si esta topología es T_0, T_1, T_2.

ii) Halla el límite o límites (si existen) de la sucesión $(\frac{1}{n})$.

iii) ¿Qué sucesiones tendrán límite? ¿Cuándo será único?