1. Espacios métricos

1. Estudia si $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibuja la bola $B(x,r)$ cuando **i)** $x = 0$ y $r = 1/2$; **ii)** $x = 1/2$ y $r = 1$.

2. Demuestra que si d es una distancia entonces $d'(x,y) = \min(d(x,y), 1)$ también lo es.

3. Si (X,d) es un espacio métrico, $A \subset X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $B_\alpha(A) = \{x \in X : d(x,A) < \alpha\}$ donde $d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Prueba que $B_\alpha(B_\beta(A)) \subset B_{\alpha+\beta}(A)$ pero que la igualdad no es necesariamente cierta.

4. Demuestra la *desigualdad triangular inversa*: en un espacio métrico (X,d),

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

5. Comprueba que los siguientes espacios de sucesiones con las distancias asociadas son espacios métricos:

i) $\mathbb{R}^\omega$ es el espacio de sucesiones de números reales $x = (x_n)$, y $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ la distancia

$$d(x,y) = \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \qquad x \in \mathbb{R}^\omega, \quad y \in \mathbb{R}^\omega$$

¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1 - 2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?

ii) ℓ_∞ es el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales, y $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ la función

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

iii) ℓ_2 es el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ de $\mathbb{R}$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$; y $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ la función

$$d(x,y) = \left(\sum_n |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$$

Indicación: Si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

6. Si (X,d) es un espacio métrico y D la función definida en $X \times X$ por $D((x_1,x_2),(x_1',x_2')) = d(x_1,x_1') + d(x_2,x_2')$, comprueba que D es una métrica. Demuestra que la función distancia $d\colon (X \times X, D) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua.

7. En $\mathbb{R}^n$ se define $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Demuestra que d_1 es una distancia en $\mathbb{R}^n$. Si d_2 es la distancia usual (euclídea) de $\mathbb{R}^n$ demuestra que

$$\forall r > 0, \exists r' > 0 \big| \ \forall x \in \mathbb{R}^n, B_1(x,r') \subset B_2(x,r) \text{ and } B_2(x,r') \subset B_1(x,r)$$

donde B_i denota la bola abierta definida por la distancia d_i $(i = 1,2)$.

8. Demuestra que $d(x,y) = \min(|x-y|, 1-|x-y|)$ define una distancia en $[0,1)$. ¿Cuáles son las funciones $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ continuas en este espacio?

2. Definición de topología. Ejemplos de topologías.

9. Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología sobre X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demuestra que $\mathcal{T}$ es la topología discreta de X.

10. Sea X un conjunto con más de dos elementos.

i) Define dos topologías $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sobre X de modo que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no sea una topología.

ii) Sea $\mathcal{T}_j$, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Prueba que $\bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_j$ es también una topología sobre X.

11. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada (a,b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\Big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\Big) \cup \Big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\Big) \subset U.$$

Estudia si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

12. Sean X un conjunto y a un elemento de X. Se considera la familia $\mathcal{T}_a$ de los subconjuntos U de X tales que o bien U es vacío, o bien $a \in U$. Estudia si $\mathcal{T}_a$ es una topología en X.

13. Sea (X,d) es un espacio métrico. Para cualesquiera x, y, x' e y' elementos de X, prueba que

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y').$$

Deduce de ello que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$ cuando $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(y_n,y)$.

14. En $\mathbb{R}^n$ se define

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Demuestra que d_1 es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Dibuja los elementos de la base para $n = 2$.

15. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico es un espacio metrizable.
Indicación: Estudia la función $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$d(<x_1,x_2>,<y_1,y_2>) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ \max\{1, |x_2 - y_2|\} & \text{si } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

y describe las ϵ-bolas con respecto a d, para $\epsilon \leq 1$.

3. Bases y entornos.

16. Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b)\colon b \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a, \infty)\colon a \in \mathbb{R}\}.$$

i) Demuestra que cada familia es una base de una topología sobre $\mathbb{R}$.

ii) Compara estas topologías.

iii) Demuestra que la topología generada por $\mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ es la usual.

17. Prueba que si $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, entonces la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{B}$.

18. Sea $\mathcal{T}_j$, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Demuestra que existe una topología que contiene a todas las $\mathcal{T}_j$, para $j \in J$ y además es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

19. Para cada punto (x,y) de $\mathbb{R}^2$ y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el conjunto $Q_r(x,y)$: «cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x,y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x,y)». Haz un dibujo que ayude a demostrar que

$$\mathcal{B} = \{Q_r(x,y)\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\}$$

es base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

20. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una *seminorma* en V es una aplicación $|\cdot| : V \to \overline{\mathbb{R}^+}$ que verifica 1. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ x \in V,\ |\lambda x| = |\lambda||x|$; 2. $\forall x, y \in V,\ |x+y| \leq |x| + |y|$.

i) Si $B_r(x) = \{y \in V \big|\ |x-y| < r\}$, prueba que $\mathcal{B} = \{B_r(x) \big|\ x \in V,\ r > 0\}$ es base de una topología en V.

ii) Demuestra que si $\mathcal{N} = \{|\cdot|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de seminormas en V tal que $\forall x \in V \setminus \{0\}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $|x|_n > 0$ entonces

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x-y|_n}{1 + |x-y|_n}$$

es una métrica en V.