Cincuenta Aniversario 1968 2018 UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... **Topología** .... Grupo ....
Apellidos .... RESPUESTAS .... Nombre ....
Ejercicio del día .... **30 de octubre de 2017** ....

1.— (3 puntos) Da un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ en el que X es un conjunto infinito y existe un único $x \in X$ para el que $\{x\}$ sea cerrado.

Se puede caracterizar la topología por medio de los cerrados. Sea X un conjunto infinito cualquiera, tomemos como cerrados no vacíos todos los subconjuntos que contienen un $x \in X$ fijado. El único de estos que es unitario es $\{x\}$.

En particular, puede tomarse $X = \mathbb{N}$ y como abiertos los conjuntos $A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}_{n \in \mathbb{N}}$ además del conjunto vacío.

Un ejemplo más simple: X infinito, $x \in X$

$\mathcal{T} = \{X, \phi, X \setminus \{x\}\}$

2.— (3 puntos) Sea $A = [0, 2) \subset \mathbb{R}$. Halla $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, y ∂A para
(a) La topología cofinita de $\mathbb{R}$ (un conjunto es abierto si es vacío o si su complementario es finito);
(b) La topología de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$ (la que tiene por base $\mathcal{B} = \{[a, b) |\ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$).

(a) Tanto A como A^c son infinitos por tanto no hay abiertos no vacíos contenidos en A ó A^c. $\overset{\circ}{A} = \phi$

Son cerrados los conjuntos finitos y $\mathbb{R}$ por tanto el menor cerrado que contiene a A es $\mathbb{R}$: $\overline{A} = \mathbb{R}$ y $\overline{A^c} = \mathbb{R}$

$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \mathbb{R}$.

(b) $[0,2)$ es abierto de $\mathcal{T}_{[\,)}$. Su complementario $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$ también es abierto. Por tanto, ambos son también cerrados.

$\overset{\circ}{A} = [0,2) = \overline{A}$; $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \phi$

3.— (4 puntos) Demuestra la siguiente caracterización de los espacios de Hausdorff:

$$X \text{ es } \mathrm{T}_2 \iff \forall x \in X, \quad \{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(x)} \overline{U},$$

donde $\mathcal{V}(x)$ es el conjunto de los entornos abiertos del punto x.

$(\Rightarrow)$ Si: X es T_2 $\forall y \neq x$ $\exists V_x, V_y : V_x \cap V_y = \phi$ V_y^c es cerrado

$V_x \subset V_y^c \therefore \overline{V_x} \subset V_y^c \therefore y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{V}(x)} \overline{U}$.

$(\Leftarrow)$ Dados $x \neq y$ $\quad y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{V}(x)} \overline{U} \therefore \exists U \in \mathcal{V}(x)$:

$y \notin \overline{U}$, $X \setminus \overline{U}$ es un entorno de y

$(X \setminus \overline{U}) \cap U = \phi$