Topología

Viernes, 19/6/2015 | Examen extraordinario | Curso 2014-2015

Apellidos: ______________ ______________ **Nombre:** ______________ **Grupo:**

Hay que JUSTIFICAR todas las respuestas

1) (**3 puntos**) En $\mathbb{R}$, se considera la topología generada por la base $\mathcal{R} = \{(-\infty, b] \ : \ b \in \mathbb{R}\}$.

a) Describir razonadamente todos los abiertos de la topología.

b) Decidir razonadamente si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ es un espacio de Hausdorff.

c) Consideramos la aplicación $\gamma : ([0,1], \mathcal{T}_{usual}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ definida por $\gamma(t) = 0$, si $t < 1$, $\gamma(1) = 2$. Demostrar que γ es continua.

d) Demostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ es conexo por caminos.

e) Demostrar que este espacio satisface IAN pero no IIAN.

2) (**3 puntos**) Hallar el interior y la adherencia de B y decidir, en los siguientes casos, si B es un subconjunto compacto y si B es un subconjunto conexo de $(X, \mathcal{T})$:

a) $B = A \times [0,1]$ donde $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ : \ n = 1, 2, \dots\}$ en $([0,1] \times [0,1], \mathcal{T}_{lex})$,

b) $B = \mathbb{Q}$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{conumerable})$.

3) (**2 puntos**)

a) Sean A y B abiertos y densos en $(X, \mathcal{T})$. Demostrar que $A \cap B$ es denso en $(X, \mathcal{T})$.

b) ¿Es cierto lo anterior si no se supone que A y B sean abiertos?

4) (**2 puntos**) Para los siguientes X hallar su grupo fundamental justificando todos los pasos:

a) Sea $X = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \geq 0\}$ con la topología inducida por la usual.

b) Sea $A = \{(1, q), (1, -q) : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ y sea B la unión de todos los segmentos cerrados que van de $(0,0)$ a un punto de A. El espacio X es $X = \mathbb{R}^2 \setminus B$ con la topología inducida por la usual.