Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

NOTA

Topología
Tercero de Matemáticas y de Informática-Matemáticas.
Enero 2014.

Apellidos.................................... Nombre........................ Grupo............

Hay que justificar todas las respuestas.

1. a) *(1 punto)* En $\mathbb{R}$ se considera la topología generada por la base $\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) \colon b \in \mathbb{R}\}$. Hallar razonadamente la adherencia y el interior del conjunto $A = (0,1)$ con esa topología.

   b) *(1 punto)* Sea $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $f(0,0) = 0$ y $f(1,1) = 1$. Demostrar que f es sobreyectiva.

   c) *(1 punto)* Demostrar que si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e inyectiva e Y es de Hausdorff, entonces X es de Hausdorff.

   d) *(1 punto)* En $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,,\,)}$, si un conjunto es cerrado y acotado ¿es compacto? Justificar.

   e) *(1 punto)* Justificar con detalle que $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 - y^2 - 2 = 0, y^2 - x^2 + z^2 \leq 3\}$ es compacto en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

   f) *(1 punto)* ¿Cuál es el grupo fundamental de $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ con la topología usual? Justificar.

   g) *(1 punto)* Sean X e Y espacios topológicos y $A \subset X \times Y$. Sea $A_x = \{y \in Y : (x,y) \in A\}$. Demuestra que si A es abierto en $X \times Y$ entonces para cada $x \in X$, A_x es abierto en Y.

2. Sea $X = \left\{(x,y) : x = r\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right), y = r sen\left(\frac{\pi}{2^n}\right), 0 \leq r \leq 1, n = 2,3,4,\ldots\right\} \cup \{(1,0)\}$ con la topología usual.

   a) *(1 punto)* ¿Es compacto?

   b) *(1 punto)* ¿Es conexo? Si no lo es, encontrar sus componentes conexas.

   c) *(1 punto)* ¿Es conexo por caminos? Si no lo es, encontrar sus componentes conexas por caminos.

   (En todos los apartados se debe dar una explicación razonada).