Examen Final

Probabilidad II 23/06/03

Apellidos____

Nombre____________________ DNI____________ Grupo____________

1.
a. (*15 puntos*) Enuncia con sumo cuidado las leyes débil y fuerte y el teorema central del límite para una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con distribución de Bernoulli de parámetro p, $(0 < p < 1)$.

b. (*10 puntos*) ¿Qué se puede decir, recordando los teorema enunciados en clase, si la sucesión de variables aleatorias independientes anterior no es idénticamente distribuida (es decir, está formada por pruebas de Bernoulli independientes X_n cada una con parámetro p_n).

2.
a. (*10 puntos*) Sean X e Y dos v.a. independientes y sea B un conjunto de Borel de $\mathbb{R}$. Demuestra que si $0 < \mathbb{P}(X \in B) < 1$ y $0 < \mathbb{P}(Y \in B) < 1$ entonces $0 < \mathbb{P}(X \in B \text{ ó } Y \in B) < 1$.

b. (*15 puntos*) Demuestra que si (X_n) es una sucesión de v.a.i.i.d. tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+, \quad \mathbb{P}(|X_1| > k) > \frac{1}{2k} \qquad \text{entonces} \qquad \forall M > 0, \quad \mathbb{P}(\frac{|X_n|}{n} > M, \text{ i.o. }) = 1.$$

3. Sean X e Y v.a.i. con distribución *Unif*$(-1, 1)$.

a. (*10 puntos*) Halla $\varphi(t)$, función característica de $X + Y$.

b. (*10 puntos*) Halla $f(x)$, función de densidad de $X + Y$.

c. (*10 puntos*) Comprueba que $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$.

4. (*20 puntos*) Demuestra directamente (sugerencia: utiliza funciones características) que si (X_n) es una sucesión de v.a.i. todas ellas con distribución *Unif*$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ y si $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ entonces

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una $N(0, 1)$ (Señala en la demostración qué resultados utilizas en los pasos importantes).