Ejercicios de Probabilidad II; curso 2002/03

1. Se lanza una moneda equilibrada repetidas veces. ¿Cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento n-ésimo
a. aparezca *cara* por primera vez?
b. el número de *caras* y *cruces* que han aparecido sea el mismo?
c. hayan aparecido **exactamente** *dos caras*?
d. hayan aparecido **al menos** *dos caras*?

2. De A a B hay dos caminos y de B a C otros dos; cada uno de esos caminos está cerrado por obras con probabilidad p independientemente de los demás.
a. Encontrar la probabilidad de que haya un camino abierto de A a B si no lo hay de A a C.
b. Si, además, hay un camino directo de A a C cerrado por obras con probabilidad p independientemente de los otros, encontrar la citada probabilidad (de que haya un camino abierto de A a B si no lo hay de A a C).

3. Una persona tiene 5 monedas (todas equilibradas), dos de ellas con doble *cara*, otra con doble *cruz* y las otras dos normales. Con los ojos cerrados toma una de ellas y la lanza al aire,
a. ¿cuál es la probabilidad de que en el lado tapado haya una *cara*?
b. Abre los ojos y ve que el lado descubierto es *cara*, ¿cuál es la probabilidad de que en el lado tapado haya una *cara*?
c. Vuelve a cerrar los ojos y la vuelve a lanzar, ¿cuál es la probabilidad de que en lado tapado haya una *cara*?
d. Abre los ojos y ve que el lado descubierto es una *cara*, ¿cuál es la probabilidad de que en el lado tapado haya una *cara*?

4. Una moneda cargada (es decir, con probabilidad de cara $p \neq \frac{1}{2}$) se lanza repetidas veces. Sea p_n la probabilidad de que hayan aparecido un número par de caras después de n lanzamientos. Demuestra que $p_n = p(1-p_{n-1}) + (1-p)p_{n-1}$ si $n \geq 1$ y halla fórmulas para los p_n.

5. Se estima que la probabilidad de que un pasajero no se presente a un vuelo es de $\frac{1}{10}$. La compañía A siempre vende 10 billetes para su avión de 9 plazas y la compañía B siempre vende 20 pasajes para su avión de 18 plazas. ¿Cuál de las dos compañías tiene problemas de exceso de pasajeros más a menudo?

6. Sean X, Y dos v.a. independientes con $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = 2^{-n}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Halla
a. $\mathbb{P}(\min[X, Y] \leq x)$, **b.** $\mathbb{P}(X \text{ divide } Y)$, **c.** $\mathbb{P}(X \geq kY)$ para $k \in \mathbb{N}$.

7. Si X es una v.a. con distribución geométrica, demuestra que $\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k)$ para cualesquiera $k, n \geq 1$. ¿Existe alguna otra distribución sobre $\mathbb{N}$ con esta propiedad?

8. Una v.a. está uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 10]$. Utiliza la desigualdad de Chebyshev para acotar superiormente $\mathbb{P}(|X - 5| \geq 4)$. Calcula exactamente esta misma probabilidad.

9. Si $\mathbb{E}[X^2] = 0$ demuestra que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. Sugerencia: *Utiliza la desigualdad de Chebyshev.*

10. Si una v.a. X tiene $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathtt{var}(X) = \sigma^2$, demuestra que se verifica la siguiente *desigualdad unilateral de Chebyshev*:

$$\mathbb{P}(X > k\sigma) \leq \frac{1}{1 + k^2}$$

y construye un ejemplo sencillo en el que esta desigualdad no sea estricta. Sugerencia: *Estudia la esperanza de* $f(x) = (kx + \sigma)^2$.

11. El modelo natural para el redondeo hasta la primera cifra decimal es la distribución uniforme en el intervalo $(-0.05, 0.05)$. En una suma de 1000 números así redondeados, ¿qué probabilidad hay de que el error tenga valor absoluto < 1?

12. Consideramos una muestra de tamaño 7 de una distribución uniforme en $(0, 1)$.
a. Calcula la probabilidad de que la mediana está en el intervalo $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$.
b. Utilizando la *aproximación Normal* haz (aproximadamente) lo mismo para la media de la muestra.
c. Repite ambos cálculos cuando el tamaño N de la muestra es muy grande y compara los resultados obtenidos.

13. Se lanza repetidamente una moneda (que tiene probabilidad p de resultar *cara*). Sea p_{mn} la probabilidad de que salgan m *caras* antes de que hayan salido n *cruces*.
a. Halla una ley de recurrencia pala los números p_{mn} con las condiciones iniciales correspondientes.
b. Da estimaciones para los números p_{mn}.
Sugerencia: ***a.*** *condiciona al resultado de la primera tirada.* ***b.*** *piensa en las* $n + m - 1$ *primeras tiradas.*

14. Si X es una v.a. con distribución geométrica, Poisson o Normal, demuestra que $\mathbb{E}[X^m] < \infty$ para cada m.

15. Una moneda equilibrada se lanza repetidamente al aire. Demuestra que, con probabilidad 1, cualquier sucesión finita de *caras* y *cruces* termina por salir. ¿Alguna idea para calcular el tiempo esperado hasta que salga?

16. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ una sucesión de v.a.i.i.d. que tienen función de densidad. **a.** Demuestra que para cada $n \geq 1$ se tiene: $\mathbb{P}(X_1 = \max(X_2, \ldots, X_n)\ ) = \dfrac{1}{n}$. **b.** Calcula la distribución y la esperanza de la variable $T = \min\{n\ :\ X_n > X_1\}$.

17. Ruina del jugador. Un jugador apuesta repetidamente, cada vez con probabilidad $p > 1/2$ de ganar 1 euro y $q = 1 - p$ de perderlo. Si comienza con un capital de N euros, halla la probabilidad r_N de que llegue a arruinarse.
SUGERENCIA: *Escribe una ecuación de recurrencia para las* r_N .

18. Romper records. Si X es una v.a. que *nunca* alcanza el supremo M de sus valores, (es decir, $\mathbb{P}(X = M) = 0$), y si X_j es una sucesión de v.a.i.i.d. con la misma distribución que X, considera los sucesos $A_n = \{X_n > \max_{j<n} X_j\}$, es decir, *el n-ésimo valor bate el record previo.* Demuestra que $\mathbb{P}(A_n\ i.o.) = 1$, pese a que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$.

19. Estrategias ganadoras. Un jugador a cara o cruz (gana ± 1 en cada tirada) decide dejar el juego la primera vez que pierda 4 tiradas seguidas. Trata de dar una opinión razonada sobre lo siguiente: la esperanza de su ganancia total G ¿será mayor, menor o igual que *cero* con esa estrategia?
Supón ahora que decide dejar el juego la primera vez que su ganancia G sea igual a 4 . ¿Cuál será la $\mathbb{E}[G]$, y por qué?

20. Hasta cuándo esperar. Alguien ha puesto en venta su coche sin fijar su precio, y se pregunta si debería aceptar la primera oferta que reciba. Tomando hipótesis sencillas y razonables, el vendedor estudia el *tiempo de espera*: $T = \min\{n\ :\ \text{la oferta } X_n \text{ es mejor que la } X_1\}$, encuentra que esta variable tiene $\mathbb{E}[T] = \infty$, y decide por lo tanto aceptar la primera oferta que reciba.
Trata de reproducir su argumento. ¿Se puede plantear la cuestión de otro modo y llegar a un consejo distinto?
SUGERENCIA: *Estudia por ejemplo la distribución* $\mathbb{E}[T]$ *como función de* X_1*; o presta atención a otras variables.*

21. Colección de cromos. Compro cada día un cromo para tratar de llenar un álbum que tiene N cromos. Suponiendo que todos ellos aparecen con igual probabilidad en los sobres que compro, halla la esperanza del tiempo que me llevará el llenarlo.
SUGERENCIA: *Estudia cada v.a.* T_k = *tiempo transcurrido para conseguir el k-ésimo cromo nuevo.*

22. Número de rachas. En la notación R_j para las tiradas de una moneda, una racha (de *caras* o de *cruces*) termina con la tirada j si se tiene $R_j R_{j+1} = -1$. Si llamamos I_j a la indicatriz de ese suceso, expresa en función de los I_j el número de rachas r_n en las n primeras tiradas de la moneda, y deducir su valor esperado.
Podríamos decir más si los I_j fuesen independientes. ¿Lo son?

23. Viudos de Bernoulli. Si mueren m personas escogidas al azar entre los $2n$ miembros de n parejas, ¿cuántas parejas esperamos que sobrevivan? Y ¿cuántas personas esperamos que queden viudas?
SUGERENCIA: *Considera las indicatrices de* $A_j = \{\text{la pareja } j \text{ sobrevive}\}$, $B_j = \{\text{de la pareja } j \text{ queda 1 viudo}\}$. *La misma idea, con más cálculos, da la varianza de esas dos v.a. (¡nota que estos sucesos NO son independientes!).*

24. Número de cajas vacías. Se meten n bolas en m cajas, escogiendo al azar cada vez una caja, independientemente de las otras bolas. Calcula la esperanza de la v.a. X_0 =*Número de cajas vacías.*
SUGERENCIA: *Usa las* m *indicatrices de los sucesos* $A_j = \{\text{la caja } j \text{ queda vacía}\}$. *Se puede ir más allá con el mismo método, y estudiar el vector* $X = (X_k),\ k = 0, ..., n$ *, con* X_k =*Número de cajas con* k *bolas.*

25. Emparejamientos. Después de limpiar en un hotel, debemos colgar cada una de las n llaves en su gancho; si lo hacemos al azar, una en cada uno, ¿cuántas llaves esperamos que queden en su sitio?
SUGERENCIA: *La respuesta es en este caso MUY fácil de calcular. Más complicado es probar que el número de las que quedan en su sitio es aproximadamente* $Poisson(1)$ *si* n *es grande.*

26.
a. Si X es exponencial, prueba que $\forall c > 0$, $\mathbb{E}[X - c \mid X > c] = \mathbb{E}[X]$.
b. Si los intervalos entre llegadas de los autobuses a la parada tienen esa distribución, calcula:
i) el tiempo esperado entre llegadas;
ii) la esperanza de mi tiempo de espera desde que llego a la parada hasta que llega el autobús.
c. Explica qué resulta *paradójico* en la respuesta a **b.**, y por qué eso sólo ocurre si los intervalos entre llegadas tienen distribución exponencial.

27.
a. Si X_1, X_2 son independientes, ambas con distribución $Normal(0, \sigma)$, prueba que las coordenadas polares R, T del punto (X_1, X_2) son v.a. independientes; da sus distribuciones, y la de cada X_i/R.
ii) Haz lo mismo para las funciones $R = X_1 + X_2$, $T = X_2/X_1$, si X_1, X_2 son independientes, con densidad $\gamma_a(x) = c_a x^{a-1} e^{-x} \mathbb{I} x > 0$ (con $a > 0$).

28. Con distribución uniforme sobre el círculo unidad del plano, se eligen al azar y de forma independiente dos puntos.
a. Halla la esperanza del cuadrado de la distancia entre los dos puntos.
b. Si U es una variable aleatoria con distribución U$[0,1]$, ¿qué función $R = r(U)$ nos dará una v.a. con la distribución «distancia al origen del primero de los puntos»?
c. Si tenemos un mecanismo que genera variables aleatorias como la U del apartado anterior ¿cómo podemos utilizarlo, una o varias veces y de forma independiente, para simular la variable D «cuadrado de la distancia entre los puntos»?

29.
a. Si X es una v.a. continua, con densidad $f_X = F'_X$, y si $g(x) = x + |x|$, muestra con un ejemplo que la v.a. $Y = g(X)$ *puede* no ser una v.a. continua.
Por el contrario, prueba que la v.a. $Z = \cos(X)$ sí tiene una densidad, y escribe una fórmula para ella.
SUGERENCIA: *Empieza suponiendo que* $0 < X < \pi$.
b. Encuentra *alguna* condición (N y/o S) sobre la función g que garantice: X continua $\Rightarrow$ $g(X)$ continua.

30. Sea θ una variable aleatoria uniforme en $(-\pi, \pi)$ y sea $X_n = \cos(n\theta)$.
Explica por qué la sucesión $\{X_n\}$ satisface la Ley Débil de los grandes números.
Explica lo que eso significa en términos de las funciones $S_N(t) = \sum_1^N \cos(nt)$.

31. Una variable X tiene como función de densidad $f(x) = 24x^{-4}\,, x \geq 2$.
a. Determina la función $g(\delta) = \mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq \delta\right)$ siendo $\mu = \mathbb{E}\left[X\right]$. Compara $g(\delta)$ con la cota dada por la desigualdad de Chebyshev.
b. Prueoba que para cualquier v.a. X se cumple: $\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq \delta\right) \cdot \delta^2 / \mathbb{E}\left[X^2 - \mu\right] \to 0$ cuando $\delta \to \infty$.

32. Estudia la distribución de X_d «distancia entre 2 puntos tomados al azar en el cubo unidad I^d».
a. Da alguna aproximación de esa distribución cuando $d \to \infty$.
b. Busca el modo de dar fórmulas exactas para cada d .
Simulación. Busca un modo eficiente de simular estas distribuciones, y escribe código que haga que esas simulaciones, produzcan gráficas de las distribuciones empíricas resultantes y las compare con las obtenidas en **b**.

33. Sea $\{X_k\}$ una sucesión de v.a. tales que **(i)** X_k depende únicamente de X_{k-1} y de X_{k+1}, **(ii)** $\exists M$ tal que $\texttt{var}\left(X_n\right) \leq M$ para todo $n \geq 1$.
Comprueba que la sucesión verifica la Ley Débil de los grandes números.
Lo mismo si se sustituye **(i)** por **(i')** $\texttt{cov}\left(X_i, X_j\right) \to 0$ cuando $|i - j| \to \infty$, o por: **(i")** $\texttt{cov}\left(X_i, X_j\right) < 0$ para todos i, j con $i \neq j$.

34. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. independientes tales que $\mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{2^n}\right) = \mathbb{P}\left(X_n = -\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$.
¿Se verificará la Ley Débil? ¿La Ley Fuerte?
SUGERENCIA: *Escribe en términos de las funciones de Rademacher* $R_j(t)$.

35. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. independientes que cumplen: $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \to 1$ cuando $n \to \infty$, pero $\sum_n \mathbb{P}\left(X_n \geq 1\right) = \infty$
a. Demuestra que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pero que esto no ocurre c.s. Más aún: que $\limsup X_n \geq 1$ c.s.
b. Razona cómo extraer de $\{X_n\}$ una subsucesión que converja casi seguro.
c. ¿Que se podría decir de la convergencia casi segura si las variables de la sucesión $\{X_n\}$ no fueran independientes?
SUGERENCIA: *En los ejercicios ya vistos se podrá encontrar un ejemplo en el que las indicatrices* $X_n = \mathbb{I}_{A_n}$ *de ciertos sucesos cumplen también lo que dice **a**.*

36. Estudia la convergencia c.s. y en media cuadrática de una sucesión de variables independientes $\{X_k\}$ sabiendo que
$$\mathbb{P}\left(|X_k| = k\right) = 1/k^a = 1 - \mathbb{P}\left(X_k = 0\right), \text{ con } a = 2$$
Preguntas adicionales: ¿Cómo variarán las dos respuestas si tomamos otros valores de a? ¿En qué (único) lugar jugará la independencia algún papel?

37. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables incorreladas tales que $\mathbb{E}\left[X_k\right] = 0$ y $\texttt{var}\left(X_k\right) \leq C \ \ \forall k$, y sean $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
Prueba que se tiene, para $a > 1$: $\dfrac{S_n}{n^a} \xrightarrow{c.s.} 0$.

38. Sea $\{X_k\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes y tales que
$$\mathbb{P}\left(X_k = k^\alpha\right) = 1/2 = \mathbb{P}\left(X_k = -k^\alpha\right).$$
Comprueba que si $\alpha < 1/2$ la sucesión $\{X_k\}$ satisface la Ley Débil y la Ley Fuerte, pero que no es así si $\alpha = 1/2$.

39. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{P}\left(X_n = 2^n\right) = \mathbb{P}\left(X_n = -2^n\right) = 1/2$.
Estudia si se verifica la Ley Débil.

40. Se toman dos puntos x_1, x_2 al azar (independientemente) en el intervalo $(0,1)$ y se define la variable aleatoria Z como la distancia entre ellos.
a. Calcula $\mathbb{E}[Z]$, $\mathtt{var}(Z)$ y $\mathbb{E}[Z^k]$.
b. Trata de repetir este cálculo si el punto x_2 se escoge con probabilidad uniforme en el intervalo $(0, x_1)$.
SUGERENCIA: *Empieza hallando las densidades de* X_1, X_2, Z.

41. Tres autobuses cubren el transporte de visitantes entre dos sectores de una feria, y cada uno tarda 15 min. en cargar viajeros en el sector A, ir hasta el B y volver.
Si circulan igualmente espaciados (cada 5 min. sale uno), tienen cada uno 60 plazas sentadas y suponemos que cada visitante puede llegar a la parada con igual probabilidad en el intervalo correspondiente a cada uno de ellos, calcular qué flujo de viajeros/hora podrán llevar sin que ocurra en más de un 5% de los viajes el que alguien deba ir de pie.

42. Se quiere realizar una encuesta para estimar la proporción p de personas que apoyarían una cierta ley (datos previos indican que hay al menos un 5%). Estima el número de personas que han de ser consultadas para que con probabilidad mayor o igual que 95% el porcentaje de la muestra difiera de p menos que 1% , distinguiendo:
a. si se da por sentado que $p < 20\%$,
b. si no se usa esa hipótesis.
c. Explica qué dificultad podría crearnos el NO saber a priori que $p > 5\%$, y pensar en alguna forma de superarla, y/o alguna razón por la que pudiéramos desdeñar esa dificultad.

43. En un cierto sector productivo se registraron 52 víctimas mortales en accidente laboral durante el año 99, lo que supone aproximadamente 1 por cada 12500 trabajadores del sector, según el censo laboral de ese año.
En el año siguiente se observa que, frente a un aumento del 5% en el censo, el número de accidentes ha aumentado hasta 60 (más del triple en términos porcentuales). ¿Qué probabilidad hay de que eso sea fruto del azar, sin que las condiciones medias de seguridad se hayan deteriorado?
SUGERENCIA: *Naturalmente, hay que plantear un modelo de probabilidad razonable para poder contestar la pregunta.*

44. En base a estudios previos se da por sentado que más del 40% de los individuos de cierta población no leen habitualmente libros, y que menos del 5% lee al menos 3 libros/mes. ¿Cuántas personas deberían ser encuestadas para que el número medio de libros leídos por mes y por persona en la muestra no se aleje de la auténtica media de libros leídos en más de 0.1 con probabilidad del 95 %?
SUGERENCIA: *Debemos usar esa información para acotar la* σ *de la v.a.* X número de libros/mes, *y claro que hay un problema: ignoramos lo que pueden pesar en ella los grandes lectores.*
Soluciones posibles: 1) hacer algunas hipótesis razonables distintas sobre esa cola derecha de la distribución, y ver cómo cambia la respuesta al variarlas; 2) calcular el tamaño N *para poder estimar con el nivel de confianza dado y errores dados estas dos cosas: el %* δ *de lectores con* $X \geq 3$ *(supuesto que sea* $\delta > 1\%$*), y la* $\mathbb{E}[X \mid X < 3]$.

45. Sean R_j las funciones de Rademacher sobre $I = [0,1]$, $S_N = \sum_{j=1}^{N} R_j$.
a. Prueba que en el desarrollo de S_N^{2m} en N^{2m} monomios en las $R_1, \ldots, R_N$, a lo más solamente hay $C_m N^m$ de ellos que tengan todos los exponentes pares (C_m es alguna constante que depende de m).
SUGERENCIA: *Es un sencillo problema de combinatoria; para entenderlo, mira primero los casos* $m = 2, 3$.
b. Deduce de allí que $S_N / N^a \xrightarrow{c.s.} 0$ si $a > 1/2$.

46. La variable X tiene una función de distribución continua y estrictamente creciente $F(x)$.
Halla la distribución de la variable $Y = F(X)$. ¿Qué ocurre si F no es continua, o si es constante en $[a, b)$?

47. Se consideran X_1, X_2, X_3 v.a. independientes y uniformes en $[0,1]$.
¿Cuál es la probabilidad de que (X_1, X_2, X_3) sean las longitudes de los lados de un triángulo?
Si son n variables $X_1, \ldots, X_n$ independientes y uniformes en $[0,1]$, ¿cuál es la probabilidad de que $(X_1, \ldots, X_n)$ sean las longitudes de los lados de un polígono?
SOLUCIÓN: $\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{(n-1)!}$.

48. Sea $X = (X_1, X_2, X_3)$ uniforme en el subconjunto del octante positivo definido por $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ y $x_1 + x_2 + x_3 \leq c$.
a. Razona, del modo más simple posible, si las X_i son independientes.
b. Halla la función de densidad de X y las distribuciones marginales de X_1, X_2, X_3.

49. Demuestra que las variables discretas X, Y con función de probabilidad conjunta $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ son independientes si y sólo si la matriz de probabilidades $(p_{ij})_{i,j=1}^{n}$ tiene rango 1 .

50. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. que toman únicamente dos valores a, b con probabilidades p, q respectivamente.
Da la distribución de la variable producto $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n$,
a. si $a = 1 = -b$;
b. si $a > b > 0$.
¿Qué límite tienen estas distribuciones cuando $n \to \infty$?
SUGERENCIA: *Es posible expresarlo en términos de la Normal.*

51. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución uniforme en $[0, L]$.
Estudia el comportamiento límite de las sucesiones $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $Z_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

52. Si X_n son v.a.i.i.d. con función de distribución F (que suponemos continua y estrictamente creciente), prueba que las v.a. $Y_n = n(1 - F(M_n))$, donde $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$, convergen en distribución a la Exp_1 .
¿Son indispensables las hipótesis hechas sobre F ?

53. Sean $X_1, \ldots, X_n$ observaciones independientes de una v.a. X, con $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \texttt{var}\,(X)$, halla la $\mathbb{E}$ de las v.a.siguientes:
i) la <u>media muestral</u> $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_j$;
ii) la $D^2 = |\bar{X} - \mu|^2$, y la <u>varianza muestral</u> $V = \frac{1}{n} \sum (X_j - \bar{X})^2$.
SUGERENCIA: *Comprueba que* $\sum (X_j - \mu)^2 = \sum \{(X_j - \bar{X})^2 + (\bar{X} - \mu)^2\}$
iii) Halla esos valores si X es *Uniforme*(0,1), y también la $\mathbb{E}$ de $M = \max(X_j)$.
Sin esa hipótesis, halla la $\mathbb{E}$ de $U = F_X(\max(X_j))$.

54. Fijemos $a > 1$, y sean R_k v.a.i.i.d. con $\mathbb{P}(R_k = \pm 1) = 1/2$ (es decir, *las funciones de Rademacher*).
i) Probar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{R_k}{a^k}$ converge c.s. a una X_a acotada.
ii) Si llamamos $S_n = \sum_{k=1}^{n} a^k R_k$, probar que cumplen: $\dfrac{S_n}{\sigma(S_n)} \xrightarrow{d} \dfrac{X_a}{\sigma(X_a)}$.
iii) Probar que si tomamos $a = 1$, estas sumas tipificadas convergen en=20 distribución a la Normal.

55. Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica con $0 < a_n \leq a$, y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty$. Sean $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, con $\{X_k\}$ independientes y Uniformes$(0, 1)$.
Estudia si se verifica: $\dfrac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma(S_n)} \xrightarrow{d}$ N(0,1) SUGERENCIA: *Usa las f.características.*

56. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. independientes tales que:

	$X_n =$	$-n$	0	n
con probabilidad	$\mathbb{P}=$	$1/2n^2$	$1 - 1/n^2$	$1/2n^2$

Prueba que $X_n \xrightarrow{c.s.} 0$, y por lo tanto $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$. Estudia si cumplen: $\dfrac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma(S_n)} \xrightarrow{d}$ N(0,1).

57. En un proceso de Poisson, sean I_1, I_2 dos intervalos de tiempo con intersección I, y sean respectivamente N_1, N_2, N el número de puntos del proceso en cada uno de esos intervalos.
Prueba que $\mathbb{E}[N_1 N_2] = \mathbb{E}[N_1]\mathbb{E}[N_2] + \mathbb{E}[N]$.

58. *Teorema central del límite* para un proceso de Poisson:
Demuestra que si N_t es un proceso de Poisson con tasa λ por unidad de tiempo, se cumple que:
$$\sqrt{t}\,(\frac{N_t}{t} - \lambda) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sqrt{\lambda}), \text{ cuando } t \to \infty$$

59. Los mensajes llegan a un fax siguiendo un proceso de Poisson con una tasa de 3 por hora.
a. Calcula la probabilidad de que no haya llegado ningún mensaje de 8h. a 10h.
b. Halla la distribución del tiempo que tarda en llegar el primer mensaje después de las 12h.

60. La llegada de barcos a un puerto sigue un proceso de Poisson con una tasa de 2 por día. El puerto atiende a un máximo de 3 barcos cada día.
a. Halla la probabilidad de que un día determinado se rechace algún barco.
b. ¿Cuantos barcos por término medio se atienden cada día?.

61. Los coches (cuya longitud despreciamos) circulan por una carretera como un proceso de Poisson con una tasa de 1/5 por segundo; un peatón necesita 10 segundos para cruzar la carretera. Calcula la probabilidad de que pueda hacerlo: i) nada más llegar; ii) en cuanto pase el 1er coche; iii) antes de que pasen 10 coches.
¿Cuántos coches deberá dejar pasar, y cuántos segundos consumirá en ello? (Halla la $\mathbb{E}$ de ambas cosas).

62. Una máquina funciona hasta que se producen k fallos. Los fallos ocurren según un proceso de Poisson de tasa λ por mes.
a. Hallar la función de densidad del tiempo de vida de la máquina.
b. Si $k = 2$ y $\lambda = 3$, halla la probabilidad de que la máquina siga funcionando después de 5 meses.

63. Los viajeros llegan a una estación siguiendo un proceso de Poisson con tasa λ. Si el tren parte en el instante t, ¿cuál es la suma esperada de los tiempos de espera de los viajeros que llegan en el intervalo $(0, t]$?

64. Sean $N_1(t)$, $N_2(t)$ los procesos de Poisson (independientes) con tasas λ_1, λ_2, que corresponden respectivamente a la llegada de partículas '¡A'¿ , '¡B'¿ . Sean T_1, T_2 los instantes de llegada de una '¡A'¿ y de la siguiente. Hallar la distribución de la v.a. $N =$ *número de partículas '¡B'¿ que llegan entre* T_1 *y* T_2.

65. Un sistema tiene dos componentes, cuyas vidas son v.a. X_j, independientes Uniformes (0,1).
Demuestra que los intervalos de tiempo T_1, T_2 entre dos reemplazamientos sucesivos de *alguna de las piezas*, no son v.a. independientes, pero que sí lo serían si la distribución de las X_j fuese la Exponencial(1).

66. Si las vidas de los n componentes de un sistema son v.a. independientes X_j con densidades $\alpha_j e^{-\alpha_j} x$, halla la distribución y la esperanza de la v.a. $T =$ *tiempo hasta que se produzca el primer fallo.*
Misma pregunta si la X_j es $Unif(0, L_j)$, con $L = \min L_j$.

67. Si X es un punto escogido al azar (uniformemente) en la esfera (sólida) de radio 1, halla la $\mathbb{E}[|X|]$.
¿Y en dimensión n?

68. Si una cierta pieza tiene una esperanza de vida de 1 mes,
a. ¿cuántos repuestos debemos dejar en almacén para estar 99% seguros de que basten para un año? Usar la aproximación Normal para responder, suponiendo que la vida T de cada repuesto tenga $\mathtt{var}\,(T) \leq 1$.
b. Suponiendo que T sea Exponencial(1), da la distribución de $N =$ *número de repuestos que se usarán durante el año*, y usa la aproximación Normal de *esa distribución* para confirmar (o no) la respuesta de **a)**.
Verifica esta aproximación sumando una cola de $Poisson$.
c. Se te ofrece la oportunidad de apostar cualquier cantidad a cara o cruz con una moneda de la que conoces la $\mathbb{P}(cara) = p > 1/2$. Decides seguir la estrategia de *apostar en cada tirada una proporción fija* γ *del capital que tengas en ese momento.*
d. Si empiezas con X_0, calcula la esperanza de tu capital X_n tras n tiradas.
e. Halla el valor de γ que maximiza la $\mathbb{E}[X_n]$. ¿Qué inconveniente tiene ese valor para adoptarlo como estrategia?
f. Halla el valor de γ que maximiza la $\mathbb{E}[\log X_n]$, y prueba que para n grande, $\log(X_n/X_0)$ es aproximadamente $Normal$, ¿con qué parámetros?

69. Sean X_n independientes; y suponemos que el $\lim X_n$ existe con $\mathbb{P} > 0$.
Prueba que $X_n \xrightarrow{c.s.} c$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

70. Sean A_n sucesos no necesariamente independientes, con $\mathbb{P}(A_n) \to 0$, $\sum \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n+1}) < \infty$.
Prueba que $\mathbb{P}(A_n, \text{i.o.}) = 0$.

71. Sean A_n sucesos independientes, con $\mathbb{P}(A_n) < 1$, $\mathbb{P}(\cup A_n) = 1$. Prueba que $\mathbb{P}(A_n, \text{i.o.}) = 1$.

72. Si X_n son v.a. independientes $=^{\mathrm{d}} X$, probar que $X_n/n \to 0$ c.s. si y sólo si existe la $\mathbb{E}[X]$.

73. Sobre un suelo con líneas paralelas a distancia 1 se tira *al azar* una aguja de longitud $L = 1$; queremos hallar la $\mathbb{P}$ (*la aguja no toque ninguna línea*).
a. Da la distribución de $\mathbb{P}$ adecuada al problema, tomando como parámetros la *distancia del centro de la aguja a la línea más cercana* y el *ángulo que forma con ellas*; y escribir la $\mathbb{P}$ pedida como un integral.
b. Estudia las variantes:
i) si la longitud L de la aguja es también una v.a. con densidad dada;
ii) si hay dos sistemas perpendiculares de líneas (un *enlosado*); en este caso, trata de contestar razonadamente, sin hacer cálculos, lo siguiente: ¿serán independientes o no los dos sucesos *la aguja toca una vertical*, *la aguja toca una horizontal*? Y si no lo son, ¿tendrán (sus indicatrices) correlación positiva o negativa? Deducir de ahí una cota superior para la $\mathbb{P}$(*la aguja no toque ninguna línea*).