Examen de Probabilidad I, 2 de septiembre de 1999

1. El dado A tiene cuatro caras rojas y dos blancas. El dado B tiene dos caras rojas y cuatro blancas. Se lanza una moneda una sola vez. Si el resultado es cara, se juega en lo sucesivo con el dado A, si es cruz, se juega con el dado B.
a) Demuéstrese que, en cualquier caso, la probabilidad de obtener cara roja es $1/2$.
b) Si en los dos primeros lanzamientos se obtuvo cara roja, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara roja en el tercer lanzamiento?
c) Si se obtuvo cara roja en los dos primeros lanzamientos, ¿cuál es la probabilidad de que se esté jugando con el dado A?

2. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con la misma función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Obtener las distribuciones marginales de

$$Y = X_1 + X_2, \qquad \text{y} \qquad Z = \frac{X_1}{X_1 + X_2}.$$

¿Son independientes las variables aleatorias Y y Z? Justificar la respuesta.

3. Un autobús anuncia su llegada a una de sus paradas a las 8:10 h., pero en realidad llega con distribución normal de media 8:10 y desviación típica 40 seg. Un viajero llega a la parada con distribución normal de media 8:09 y desviación típica 30 seg.
a) ¿Con qué probabilidad llega el viajero a la parada antes de las 8:10?
b) ¿Con qué probabilidad llega el viajero a la parada antes que el autobús?
c) Si el viajero llega a la parada a las 8:09 y a las 8:12 el autobús todavía no ha llegado, ¿cuál es la probabilidad de que el viajero haya perdido el autobús?

4. a) Sean X e Y variables aleatorias continuas. Considérese la variable aleatoria Z que a cada valor y de Y asocia

$$Z(y) = E[X \mid Y = y].$$

Demuéstrese que $E[Z] = E[X]$.
b) Supóngase que un punto X_1 se elige con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. A partir del valor $X_1 = x_1$ obtenido, se elige otro punto X_2 con distribución uniforme en el intervalo $(x_1, 1)$. Repitiendo este procedimiento, se construyen variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \ldots$ En general, a partir de cada valor $X_n = x_n$ obtenido se elige X_{n+1} con distribución uniforme en $(x_n, 1)$. Hállese el valor de $E[X_n]$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$