Probabilidad I
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-05
Examen de septiembre, 6-9-2005

1. (20 puntos) Sea $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$, donde p es un número primo; supongamos que los elementos de Ω son equiprobables. Demostrar que dos sucesos A y B no pueden ser independientes (salvo en el caso de que bien A, bien B, sea todo Ω ó $\emptyset$).

2. Sea X una variable aleatoria con esperanza que toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$.

a. (15 puntos) Demostrar que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > k).$$

b. (15 puntos) Un dado con seis caras tiene 3 unos, 2 doses y 1 cinco. Calcular el número esperado de lanzamientos que habrán de hacerse para que aparezcan los tres posibles resultados.

3. (20 puntos) Sean X e Y variables aleatorias discretas e independientes, ambas con distribución geométrica de parámetros respectivos p y r. Demuéstrese que la variable $U = \text{mín}\,\{X, Y\}$ sigue una distribución geométrica con parámetro $p + r - pr$.
Nota: Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución geométrica de parámetro p si toma valores en el conjunto $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ con probabilidades $\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

4. X e Y tienen función de densidad conjunta dada por $f_{X,Y}(x, y) = ke^{-ay^2}$ si $0 < x < y < \infty$ (0 en otro caso), donde k y a son constantes positivas.

a. (10 puntos) Hallar la relación que debe existir entre k y a.

b. (10 puntos) Hallar las funciones de densidad marginales (es posible que una de ellas haya de dejarse en forma integral).

c. (10 puntos) Hallar las densidades condicionadas (anotar claramente para que valores de cada variable están definidas y cuál es el dominio de definición de cada una).