1. Si X tiene función de distribución $F_X(x)$, ¿cuál es la función de distribución de $Y = \text{máx}(X, 0)$?

2. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_1 y F_2 respectivamente. Sea Y una variable aleatoria independiente de las anteriores (es decir, X_1, X_2, Y son v.a.i.) que toma valores $0, 1$ con probabilidades $p, q = 1 - p$ respectivamente. Sea $Z = YX_1 + (1 - Y)X_2$ (es decir, con probabilidad p, $Z = X_1$ y con probabilidad $1 - p$, $Z = X_2$). Demostrar que la función de distribución de Z es la función $F(x)$ definida por $F(x) = p\,F_1(x) + q\,F_2(x)$.

3. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F_X(x)$ dada por $\frac{1}{2\,(1+x^2)}$ si $x \leq 0$ y por $\frac{1+2x^2}{2\,(1+x^2)}$ si $x > 0$. Mostrar que X es una variable aleatoria continua y determinar su función de densidad.

4. Determinar la constante c y las funciones de distribución correspondientes a las funciones de densidad siguientes: **a.** $f(x) = ce^{-|x|}$; **b.** $f(x) = c\exp\left(-x - e^{-x}\right)$; **c.** $f(x) = c\,[x\,(1-x)]^{-1/2}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

5. La variable aleatoria X sigue una distribución exponencial de parámetro λ. Encontrar las funciones de densidad de las variables aleatorias $A = 2X + 5\,, \quad B = e^X\,, \quad C = (1 + X)^{-1}\,, \quad D = (1 + X)^{-2}$.

6. Si X es una variable aleatoria $N(0, 1)$, encontrar la función de densidad de $Y = e^X$ y también $\mathbf{E}(Y)$. ¿Cómo se transforma Y cuando X pasa a ser una $N(\mu, \sigma)$? (se dice entonces que la variable Y tiene una **distribución lognormal** de parámetros μ y σ).

7. Calcular la media y la varianza de la variable X, cuya función de densidad viene dada por
a. $f(x) = \lambda\,e^{-\lambda\,x}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$;
b. $f(x) = c\,\lambda e^{-\lambda|x|}$.
Indicación: Empezar por razonar qué densidad tiene X/λ, para reducir todo al caso $\lambda = 1$.

8. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución F es continua. Demostrar que la variable aleatoria $Y = F(X)$ está uniformemente distribuida en $(0, 1)$.

9. Sea F una función de distribución continua y estrictamente creciente y U una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$. Comprueba que la variable aleatoria $X = F^{-1}(U)$ tiene función de distribución F. ¿Cómo se puede utilizar el resultado anterior para generar números aleatorios con distribución F? (aplícalo, por ejemplo, al caso de la distribución exponencial).

10. Un botánico ha observado que la anchura, X, de las hojas del álamo sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 6$ cm. Si el 90 % de las hojas tienen una anchura inferior a 7,5 cm, hallar σ.

11. La duración, en minutos, de las conferencias en un congreso sigue una distribución lognormal de parámetros μ, σ. Hallar μ y σ sabiendo que el 60 % de las conferencias duran más de 40 minutos y el 55 % menos de 50 minutos.

Varias variables aleatorias (continuas)

12. $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias i.i.d. con función de distribución F y de densidad f (común a todas ellas). Definimos $U = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $V = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$. Obtener las funciones de distribución y densidad de U y V. Observar que las distribuciones obtenidas se pueden relacionar a través de $\text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} = -\,\text{máx}\{-X_1, \ldots, -X_n\}$.
Extender estos resultados al caso en el que las X_i, independientes, tengan funciones de distribución F_i y de densidad f_i, no necesariamente iguales.

13. X e Y son dos variables aleatorias independientes que siguen distribuciones exponenciales de parámetros λ y μ, respectivamente. Muéstrese que $Z = \text{mín}\{X, Y\}$ sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda + \mu$.

14. Una compañía compra 100 bombillas, cada una de las cuales tiene un tiempo de vida que es una variable aleatoria exponencial de media 1000 horas. Calcular el tiempo esperado en el que fallará la primera de ellas.

15. Sea (X_i) una sucesión de variables aleatorias continuas i.i.d. Sea N el primer índice para el que $X_{N-1} < X_N$. Probar que $\mathbf{P}(N = k) = (k-1)/k!$. Comprobar que $\mathbf{E}(N) = e$ y que $\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)/k! = 1$.

16. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con distribución conjunta uniforme en $[0,1] \times [0,1]$. Hallar $\mathbf{E}(|X - Y|)$, $\mathbf{E}(\max\{X,Y\})$, $\mathbf{E}(\min\{X,Y\})$, $\mathbf{E}(X^2 + Y^2)$ y $\mathbf{E}((X+Y)^2)$.

17. Las variables aleatorias X e Y están uniformemente distribuidas en el disco unidad. Esto es, $f_{X,Y}(x,y) = 1/\pi$ si $x^2 + y^2 \leq 1$ y vale 0 en otro caso. Calcular $\mathbf{E}(\sqrt{X^2 + Y^2})$ y $\mathbf{E}(X^2 + Y^2)$.

18. X e Y tienen función de densidad conjunta dada por $f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}$ si $0 < x < y < \infty$ (y 0 en otro caso). Calcular $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$ y $\mathbf{E}(Y \mid X = x)$.

19. El par (X_1, X_2) tiene función de densidad conjunta normal bivariante con parámetros $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y $-1 < \rho < 1$. Definimos

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}, \qquad (i = 1, 2).$$

¿Cuál es el coeficiente de correlación del par (Z_1, Z_2)? Hallar la función de distribución conjunta del par (Z_1, Z_2). Calcular $\mathbf{E}(Z_1 Z_2) - \mathbf{E}(Z_1)\,\mathbf{E}(Z_2)$ y $\mathbf{E}(Z_2 \mid Z_1 = z)$.

20. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d, con distribución exponencial de parámetro λ común a todas ellas. Definimos $S_0 = 0$ y $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, para cada $n \geq 1$. Probar que la función de densidad de S_n viene dada por

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}\,.$$

Fijemos ahora un $t > 0$ y consideremos $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Comprobar que $N(t)$ sigue una distribución de Poisson (Sugerencia: condicionar sobre $S_n = s$, $s < t$).

21. Probar que si X e Y son variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, entonces $Z = Y/X$ sigue una distribución de Cauchy. Deducir que si (R, θ) es la representación en polares del punto (X, Y), entonces θ está uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$. ¿Cuál es la distribución de R^2?

22. Dar un ejemplo de dos variables aleatorias continuas X, Y incorreladas pero no independientes.

23. La variable X tiene densidad $f_X(x) = x \exp(-x^2/2)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. La variable Y, independiente de la anterior, es uniforme en $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Si llamamos $Z = X + Y$, hallar $f_Z(z)$ y calcular $\mathbf{P}(Z > \varepsilon)$.

24. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ. Encontrar la función de distribución y la función de densidad de las variables aleatorias $A = 1 - e^{-\lambda X}$, $B = \min\{X, Y\}$ y $C = X - Y$. Calcular la probabilidad de que $\max\{X, Y\} \leq aX$, donde a es un número real dado.

25. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con distribución normal de media 0 y varianza 1. (a) Mostrar que $W = 2X - Y$ sigue una distribución normal. ¿Cuáles son su media y su varianza? (b) Encontrar la media de $Z = X^2/(X^2 + Y^2)$. (c) Calcular la media de V/U, donde $U = \max\{|X|, |Y|\}$ y $V = \min\{|X|, |Y|\}$.

26. Una fuente emite una partícula en tiempo cero. En un cierto instante (aleatorio) S se desintegra y uno de los productos de esa desintegración se observa en tiempo T, $T \geq S$. La variable T tiene densidad $f_T(t) = t\, e^{-t}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}$. Además, para cada $t > 0$, la distribución de S condicionada a que $T = t$ es uniforme en $(0, t)$. Hallar la densidad conjunta de S y T. Calcular la densidad conjunta de S y $T - S$ y mostrar que estas dos son variables aleatorias i.i.d. Si llamamos $Z = \max\{S, T - S\}$, ¿cuál es la función de densidad de Z? ¿Qué relación hay con el ejercicio 18 de esta hoja?