1. Para qué valor de la constante c será

$$p(k) = \frac{c}{k(k+1)} \qquad \text{para cada} \quad k = 1, 2, \ldots \quad (\text{y } p(k) = 0 \text{ en otro caso})$$

la función de densidad (función de masa) de una variable aleatoria discreta? ¿Y para qué valores de α y c sería

$$p(k) = c\, k^{\alpha} \quad k = 1, 2, \ldots \quad (\text{y } p(k) = 0 \text{ en otro caso})$$

la función de densidad de una variable aleatoria?

2. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con parámetro λ, demostrar que la probabilidad de que X sea **par** es $e^{-\lambda}\cosh(\lambda)$.

Indicación: realizar los tres ejercicios siguientes de forma consecutiva.

3. Se eligen al azar y con reposición cuatro bolas de una urna que contiene n bolas azules, n bolas blancas y n bolas coloradas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer al menos una de cada color?

4. Una variable aleatoria X toma valores $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Demostrar que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > k)$$

(si es que la serie de la derecha converge).
¿Qué podemos decir si la serie diverge? ¿Vale la fórmula (o es fácilmente adaptable) si los valores de X son los enteros ≥ 1? ¿Y si son los enteros ≥ -1?

5. Un dado con seis caras tiene 3 unos, 2 doses y 1 cinco. Calcular el número medio de lanzamientos que tendremos que hacer para que aparezcan los tres posibles resultados.

6. N sobres cerrados contienen tarjetas numeradas del 1 al N. Se escribe sobre cada uno de ellos un número del 1 al N elegido de manera independiente y equiprobable. Halla la probabilidad de que ningún sobre quede numerado con el mismo número que figura en su interior.
Responde a la misma pregunta si los sobres se van extrayendo al azar y numerando consecutivamente del 1 al N (es decir, los números no se repiten).
¿Cuál es, en cada uno de los dos modelos, la probabilidad de que en exactamente k de los sobres los números coincidan? Si N es un número «muy grande» la respuesta en ambos casos se aproximará a la distribución de Poisson de parámetro 1. Explicar por qué y en qué sentido.

7. En media, sólo una persona de cada 1000 tiene un cierto tipo peculiar de sangre.
a. Hallar la probabilidad de que en una ciudad de 10000 personas no haya nadie con ese tipo de sangre.
b. ¿Cuál es el número mínimo de personas (elegidas al azar) cuya sangre debemos analizar para tener una probabilidad de al menos el 50 % de que entre ellas haya alguna persona con ese tipo de sangre?

8. Una compañía aérea sabe que un 4 % de los pasajeros que hacen reservas en un vuelo no se presentan a facturar. La política de la compañía es vender 100 reservas en un avión de 98 plazas. ¿Cuál es la probabilidad de que (habiendo vendido 100 reservas) el vuelo parta completo y cuál la de que falte sitio para algún pasajero con reserva?
Calcular las respuestas de forma «exacta» y, utilizando la distribución de Poisson, de forma aproximada. Comparar los resultados y tratar de argumentar por qué la discrepancia es irrelevante.

9. En Las Vegas, la ruleta tiene los números del 1 al 36 y además un 0 y un 00. Estos treinta y ocho resultados son igualmente probables. Cuando se apuesta 1 dólar a un número, el jugador recibe 36 dólares (ganancia de 35 dólares) si la bola cae en el número; en caso contrario, se pierde la apuesta de 1 dólar (ganancia de -1). ¿Cuál es la ganancia esperada?
Si se apuesta 1 dólar a par, por ejemplo, entonces se recibe otro dólar si sale par y se pierde el dólar apostado en caso contrario. ¿Cuál es ahora la ganancia media? (el 0 y el 00 no se consideran ni pares ni impares).

10. Una familia real tendrá hijos hasta que tenga un hijo varón o hasta que tenga tres hijos. La probabilidad de hijo varón es de un 50 %. ¿Cuál el valor esperado del número de hijos que tendrá la familia?

11. Tienes 80 dólares y participas en el siguiente juego. Una urna contiene 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Se van a extraer las cuatro bolas seguidas sin reemplazamiento y sin que se descubran hasta el final. En cada paso apuesta la mitad de tu fortuna a que sale blanco. ¿Cuál es tu ganancia esperada?

12. Tenemos seis llaves para abrir una puerta, pero solo una de ellas la abre. Intentamos las llaves, una tras otra. ¿Cuál es el número esperado de intentos que necesitaremos? Haz una conjetura y después trata de probarla.

13. **Las huellas dactilares**. Se acepta que el número de individuos X en una población que tiene huellas dactilares de un cierto tipo sigue una Poisson con cierto parámetro λ (reflexiona sobre la validez de esta hipótesis).

Un delincuente deja una huella dactilar del tipo t en el escenario de un crimen. La probabilidad de tener una tal huella es de 1 entre un millón, y en la ciudad viven 10 millones de personas. Se detiene a un sospechoso con ese tipo de huellas dactilares. Con esta única evidencia, ¿crees que sería condenado en un juicio?

14. El **coleccionista de cromos**: tratamos de completar nuestra colección de cromos; hay N cromos diferentes. Cada mañana vamos al kiosko y compramos un sobre con un cromo. Al principio, claro, vamos obteniendo cromos diferentes, pero cabe la posibilidad de que nos vayan entrando cromos repetidos. ¿Cuántas mañanas, en media, tendremos que ir al kiosko hasta completar nuestra colección? SUGERENCIA: llamemos T_j, para cada $j = 1, \dots, n$, al número de sobres que hay que abrir, una vez conseguidos los $j-1$ primeros cromos, para obtener el cromo j. Por ejemplo, $T_1 = 1$. Compruébese que, para cada $j \geq 1$, T_{j+1} es una variable aleatoria que sigue una geométrica de parámetro $1 - j/N$.

15. Sea X es una variable aleatoria con valores $X = 1, 2, \dots$.
a. Demostrar que X es una variable aleatoria Geom(p) si y solo si $\mathbf{P}(X > m) = (1-p)^m$ (es decir $\mathbf{P}(X > m) = \mathbf{P}(X > 1)^m$).
b. Demostrar que X cumple

$$\mathbf{P}(X > m+n | X > m) = \mathbf{P}(X > n) \tag{1}$$

si y sólo si X es una distribución geométrica.
(Observación: si X representa el tiempo transcurrido hasta que ocurre un determinado suceso, podemos interpretar (1) diciendo que X no «tiene memoria»).

16. Jugamos a la ruleta (tiene un único cero), y siempre apostamos al rojo. Si sale rojo, ganamos una cantidad igual a nuestra apuesta. Pero seguimos la siguiente estrategia: la primera apuesta es de 1 dólar; si ganamos, nos retiramos. En caso contrario, doblamos nuestra apuesta (apostamos 2) para la siguiente partida. De nuevo, si ganamos nos retiramos; y si perdemos volvemos a doblar la apuesta, que sería de 4 (así jugaba Casanova, durante el Carnaval de Venecia, allá por 1754; esta estrategia se conoce como el juego a la *martingala*). Comprueba que esta estrategia te hace ganar 1 dólar tarde o temprano. ¿Dónde está la «trampa»? Calcula cuál es, en media, la apuesta que debes hacer para ganar ese dólar.
Haz un modelo más realista, suponiendo que hay un límite de apuestas en el casino. Por ejemplo, que no está permitido apostar más de 2^{10} dólares. O quizás que no se puede apostar más de 10 veces seguidas.

17. **Errores de imprenta**. Cada carácter en un libro se imprime incorrectamente (de manera independiente de cualquier otro) con probabilidad p. Hay n caracteres en el libro y X cuenta el número de errores cometidos. Calcular $\mathbf{P}(X = r)$, $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(X|X \neq 0)$. Explicar por qué

$$\mathbf{E}(X|X \neq 0) \approx \frac{\mathbf{E}(X)}{1 - e^{-\mathbf{E}(X)}} .$$

18. La **ruina del jugador**. Jugamos partidas a cara y cruz (probabilidad p de obtener cara), apostando siempre 1, hasta que, bien hayamos alcanzado una fortuna N, bien nos hayamos arruinado (fortuna 0). Llamamos $p(n)$ a la probabilidad de arruinarnos si nuestra fortuna inicial es n. Observa que $p(0) = 1$ y $p(N) = 0$. Prueba que, para $1 \leq n \leq N-1$,

$$p(n) = p\,p(n+1) + (1-p)\,p(n-1) .$$

Halla la solución de esta relación de recurrencia.
Calcula el número medio de partidas que se disputan hasta que el juego termina, si n es la fortuna inicial (de nuevo, obtendrás una relación de recurrencia, que puedes intentar resolver).

19. Este ejercicio trata sobre la información que aporta la desigualdad de Chebyshev. Consideremos las siguientes variables aleatorias:

$X \sim \text{Bin}(100, 0'1)$; $\qquad$ Y que toma dos valores, 7 y 13, cada uno con probabilidad $1/2$.

Calcula medias y varianzas de X y de Y.
a. Calcula, quizás con ayuda del ordenador, los números $\mathbf{P}(5 < X < 15)$ y $\mathbf{P}(5 < Y < 15)$. Estima esas cantidades utilizando la desigualdad de Chebyshev y compara los resultados.
b. Repite los cálculos para $\mathbf{P}(7 < X < 13)$ y $\mathbf{P}(7 < Y < 13)$. Extrae conclusiones.
Sea X una variable aleatoria discreta con valores $X = 0, 1, 2, \dots$ y que tiene $\mathbf{E}(X) = 1$ y $\mathbf{V}(X) = 1$.
c. Demuestra que, para cualquier natural k,

$$\mathbf{P}\left(X \geq k+1\right) \leq \frac{1}{k^2} .$$

d. Deduce que

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) e \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \qquad \text{para cada } k = 1, 2 \dots$$