1. Hacia 1600, Galileo escribió un pequeño opúsculo (*Sopra le scoperte dei dadi*) en el que estudiaba si al lanzar tres dados (juego de azar popular entonces) era más probable la suma 9 o la suma 10. Observa que 9 y 10 pueden escribirse de seis formas distintas como suma de tres números:

$$\begin{array}{ccccccc} 9 = & 1+2+6 = & 1+3+5 = & 1+4+4 = & 2+2+5 = & 2+3+4 = & 3+3+3, \\ 10 = & 1+3+6 = & 1+4+5 = & 2+2+6 = & 2+3+5 = & 2+4+4 = & 3+3+4. \end{array}$$

Justifica, como hacía Galileo, que la suma 10 es más frecuente que la suma 9 en este juego, cosa que sabían los jugadores experimentados de la época.

2. Lanzamos una moneda 10 veces (la probabilidad de que salga cara en cada una de estas tiradas es $\frac{1}{2}$). Describe el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ que mejor se adapte a las siguientes situaciones: **a.** lo que nos interesa es el resultado de cada lanzamiento individual; **b.** solamente nos interesa el número de caras obtenido.

3. Se lanza un dado n veces, donde n es el número que sale en el primero de esos lanzamientos. Construir el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ que permite describir este fenómeno aleatorio. Hecho esto, calcular la probabilidad del suceso «sale un número par (o cero) de seises».

4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar las siguientes afirmaciones (en las que A, B y $A_1, \dots, A_n$ son sucesos cualesquiera):
a. $\mathbf{P}(A \cup B) \le \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
b. $\mathbf{P}(\bigcup_{j=1}^n A_j) \le \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j)$ (desigualdad de Boole).
c. $\mathbf{P}(A \cap B) \ge \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1$.
d. $\mathbf{P}(\bigcap_{j=1}^n A_j) \ge \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j) - (n-1)$.

5. Disponemos de dos urnas: U_1 contiene a_1 bolas azules y b_1 bolas blancas; U_2 tiene a_2 bolas azules y b_2 blancas. Se sortea con una moneda la elección de una urna y posteriormente se extrae al azar una bola de esa urna. **a.** Formular un modelo de este proceso. **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea azul? **c.** Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna U_1?

6. Ahora las dos urnas contienen 4 bolas azules y 3 bolas blancas y 3 bolas azules y 7 blancas, respectivamente. Primeramente elegimos una urna como en el ejercicio anterior, extraemos de ella una bola al azar y la pasamos a la otra urna. A continuación, volvemos a elegir, por el mismo procedimiento, una urna y extraer al azar una bola de esa urna. Organiza adecuadamente toda esta información y contesta las dos preguntas siguientes: **a.** ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída al final sea blanca?, **b.** si la bola extraída al final es azul ¿cuál es la probabilidad de que la primera urna elegida fuese la U_1?

7. Sea Ω un espacio muestral. **a.** Comprobar que $\{\varnothing, \Omega\}$ cumple la definición de «espacio de sucesos» (aunque no sea un ejemplo muy interesante). **b.** Probar que dado $A \subset \Omega$, el **mínimo** espacio de sucesos al que pertenece A es $\{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$. **c.** Dados $A, B \subset \Omega$, **distintos**, probar que también hay un tal mínimo, y estudiar cuántos elementos puede tener. (INDICACIÓN: hay 4 respuestas posibles, según sean A, B; determinar en cada caso los subconjuntos «básicos»). **d.** Dados $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$, demostrar que existe una mínima álgebra de sucesos que los contiene.

8. Dos jugadores de tenis, A y B, tienen probabilidades p y $1-p$ de ganar un punto cuando sirve A.
a. Hallar la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve y que en este momento está en situación de *deuce*.
b. Hallar la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve.

9. Se observa que en un cultivo celular el 40 % de los individuos poseen un cierto factor F. Las células de este cultivo se reproducen por gemación. El 80 % de las células nuevas procedentes de un individuo con factor F también tienen este factor. El 5 % de las células nuevas procedentes un individuo que NO tiene el factor F si que lo tienen.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que una nueva célula del cultivo tenga este factor?
b. Si una célula nueva tiene el factor F, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de una célula que también lo tiene?
c. ¿Puedes deducir alguna propiedad respecto de la permanencia del factor F en el cultivo?

10. En un proceso de producción una cierta pieza resulta defectuosa con probabilidad $0'08$. El control de calidad de la fábrica detecta que una pieza es defectuosa con probabilidad $0'93$ y comete el error de tomar como defectuosa una pieza normal con probabilidad $0'06$.
a. Si el control determina que una pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea?
b. Si determina que es normal ¿cuál es la probabilidad de que lo sea?

Los ejercicios siguientes tienen resultados que pueden resultar paradójicos en una primera impresión. Convéncete de que no hay tales paradojas.

11. Se extrae al azar una ficha de dominó de un juego completo y se muestra solamente una de sus dos facetas, también escogida al azar, que resulta ser un 4. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la ficha *blanca-cuatro*? (la respuesta no es $\frac{1}{7}$). ¿Cuál es la probabilidad de que sea el *cuatro doble*?

12. (Urna de Pólya) En una urna hay b bolas blancas y a azules. Extraemos una bola, miramos su color, la devolvemos a la urna y añadimos otra bola de ese mismo color. El proceso se repite indefinidamente. Llamemos B_n al suceso «sacamos bola blanca en la n-ésima extracción». **a.** ¿Cuál es la probabilidad del suceso B_2? **b.** ¿Cuál es la probabilidad de haber sacado una bola blanca en la primera extracción si es que hemos sacado blanca en la segunda? **c.** (difícil) Probar que $\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(B_1)$ para cada $n \geq 1$. **d.** ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca suponiendo que en la n-ésima extracción hemos obtenido una bola blanca?

13. Consideremos un espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ y la probabilidad dada por $\mathbf{P}(\omega) = 1/4$ para cada $\omega \in \Omega$.
Dar un ejemplo de tres sucesos $A, B, C \subset \Omega$ tales que
a. sean independientes dos a dos pero no sean independientes.
b. A y B sean independientes; B y C sean independientes pero B no sea independiente de $A \cup C$.
c. A y B sean independientes; B y C sean independientes pero B no sea independiente de $A \cap C$.

14. Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, donde p es un número primo; los elementos de Ω son equiprobables. Comprobar que dos sucesos A y B no pueden ser independientes (salvo en el caso de que o bien A o bien B sean todo Ω ó $\emptyset$).

15. Estamos con el juego de las tres puertas, tras las que se ocultan un premio y dos baratijas. En el mecanismo original, se elige una puerta, el presentador abre una puerta descubriendo una baratija y se da la opción de cambiar la elección inicial.
a. ¿Qué ocurriría si el concursante lanzara una moneda (regular) para decidir si cambia o no?, ¿cuál sería la probabilidad de ganar el juego?
b. Volvemos al mecanismo original, pero ahora tenemos cinco puertas: dos de ellas ocultan el gran premio, y tras las otras se esconden sendas baratijas. ¿Cuál es la probabilidad ahora de ganar?
c. Generalizar al caso en el que hay $a \geq 1$ puertas con premio y $b \geq 2$ puertas sin premio. ¿Es siempre mejor estrategia cambiar la elección inicial?

16. (*...mira el Trión, que ha por deporte ser inconstante...* Juan de Mena) Llamamos «trión» a un dado, perfectamente regular, en cuyas caras aparecen tres números distintos, cada uno de ellos dos veces. Queremos diseñar tres triones, digamos A, B, C de manera que ningún número aparezca en más de un dado y de forma que A gane a B, B gane a C y C gane a A (un trión X *gana* a otro Y cuando al lanzarlos, la probabilidad de que el resultado de X sea mayor que el resultado de Y es mayor que $\frac{1}{2}$). Con los dados que has construido, ¿cuál es la probabilidad de que gane cada uno de ellos al lanzar los tres a la vez? ¿Se pueden construir de forma que estas tres probabilidades sean iguales?