

Examen de Probabilidad I, 4 de Febrero de 1999

1. La función de densidad conjunta de las variables aleatorias X e Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) & \text{si } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Obtener la función de densidad de la variable aleatoria X .

b) Calcular la probabilidad condicionada $P\left(Y > \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right)$

2. La probabilidad de que un huevo de insecto dé origen a un nuevo insecto es p . Supongamos que en una flor el número de huevos puestos por estos insectos sigue una distribución de Poisson de media λ .

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una flor no nazca ningún insecto?

b) Calcular la distribución del número de insectos que nacen en una flor.

c) Si se ha observado que en una flor no ha nacido ningún insecto, calcular la probabilidad de que hubiera menos de 2 huevos en la flor.

3. El tiempo de vida, en meses, de cierto tipo de bombillas es una variable aleatoria con distribución *exponencial* de media 12. Un vendedor se compromete a lo siguiente:

- Si la bombilla se funde antes del cuarto mes, devuelve al comprador 60 ptas.

- Si se funde en un instante x entre el cuarto y el sexto mes, devuelve al comprador $180 - 30x$ ptas.

- No devuelve nada, si se estropea a partir del sexto mes.

Si en cada bombilla gana 100 ptas. Se pide:

a) Distribución de la ganancia obtenida por bombilla.

b) Ganancia media por bombilla.

c) Si una persona compra 10 bombillas, calcular la distribución del número de bombillas que devolverá antes del primer mes.

4. Las notas de un grupo de opositores en los tres ejercicios que se realizan durante una oposición siguen distribuciones normales dadas por:

$$X = \text{nota del primer ejercicio, } X \sim N(7, 1)$$

$$Y = \text{nota del segundo ejercicio, } Y \sim N(5, \sigma = 2)$$

$$Z = \text{nota del tercer ejercicio, } Z \sim N(6, 1)$$

Se elige un opositor al azar y se pide:

a) Si la nota final es el promedio (media) de las de los tres ejercicios, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado la oposición? (se aprueba con nota ≥ 5)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado las tres pruebas? (se aprueba con nota ≥ 5)