

**Probabilidad I**  
**Segundo de Matemáticas UAM, curso 2003-2004**  
**Examen final, 29-1-2004**

1. Contesta, razonando las respuestas, a las siguientes tres cuestiones:
- (a) En cierto tugurio se desarrolla el siguiente juego: se lanza una moneda (equilibrada) hasta que salga cara. El límite es de 10 lanzamientos. Si sale cara a la primera, se reciben 2 euros, si sale en la segunda, 4 euros, si a la tercera, 8 euros. Y así sucesivamente, de manera que, si sale en la última tirada, se reciben  $2^{10} = 1024$  euros. Ahora bien, si no sale cara en ninguno de los lanzamientos, no se recibe nada. ¿Cuánto se gana, en media, en este juego?
  - (b) Modelamos el resultado de un cierto experimento con una variable aleatoria  $X$ , de la que sabemos que  $\mathbf{E}(X) = 3$  y  $\mathbf{V}(X) = 1$ . ¿Podrías asegurar que la probabilidad de que el resultado del experimento esté entre 1 y 5 es de, al menos, un 60%?
  - (c) Vamos a escoger aleatoriamente  $n$  números  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Estas elecciones se realizan independientemente unas de otras y siguiendo, en todos los casos, una distribución uniforme entre 0 y  $3/4$ . ¿Qué esperarías del valor del número

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \quad ?$$

2. En una urna tenemos  $b$  bolas blancas y  $n$  bolas negras. Seguimos el siguiente procedimiento: extraemos una bola, miramos su color y la devolvemos a la urna, junto con otra de su mismo color. Esto lo repetimos muchas veces.

Suponiendo que en la segunda extracción hemos obtenido una bola blanca, ¿con qué probabilidad la bola extraída en primer lugar habrá sido blanca?

3. Una fuente  $A$  emite un destello luminoso en tiempo  $T_A$ , una variable aleatoria exponencial de parámetro  $\lambda > 0$ . Otra fuente  $B$  emite su destello, independientemente de la anterior, en tiempo  $T_B$ , que también sigue una distribución exponencial, de parámetro  $\mu > 0$ .

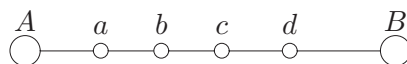
Si ponemos a funcionar ambas fuentes a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que el primer destello emitido sea el de la fuente  $A$ ?

4. En un grupo de 1000 personas se desarrolla el siguiente experimento: a cada una de ellas se le pide que elija un número (entero) entre 0 y 9. Registramos las 1000 respuestas y calculamos la media aritmética. El resultado final es un número entre 0 y 9.

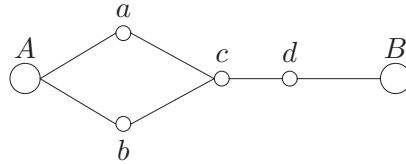
Suponiendo que cada persona ha elegido su número al azar (esto es, con una distribución uniforme) e independientemente unas de otras, utiliza el Teorema del límite central para estimar la probabilidad de que el resultado final sea un número comprendido entre 4,6 y 4,7.

5. La corriente producida en  $A$  circula por una red hasta  $B$  pasando por nodos intermedios  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Se arranca el sistema y los nodos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  están operativos unos tiempos (en segundos)  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $T_c$  y  $T_d$ . Estos tiempos son variables aleatorias independientes que siguen todas la misma distribución: geométrica de parámetro  $p = 0,01$ .

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la corriente circule de  $A$  a  $B$  al menos 10 segundos en el siguiente circuito?



(b) ¿Y en este otro?



**6.** Estás concursando en la televisión, respondiendo a cuantas preguntas te formulan. Digamos que respondes correctamente a cada pregunta con probabilidad  $p$ . Según las reglas del concurso, recibes 3000 euros por respuesta acertada, y eres eliminado en cuanto falles dos respuestas consecutivas. ¿Cuál será tu ganancia media?

**Notas y comentarios:**

- La suma de los  $n$  primeros números naturales y de los  $n$  primeros cuadrados:

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

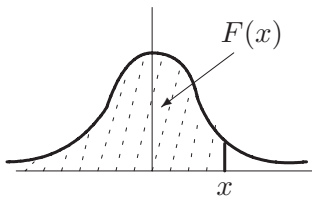
- La función de densidad de una variable aleatoria  $X$  con distribución exponencial de parámetro  $\alpha > 0$  es

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad x > 0.$$

- Una variable  $X$  que sigue una distribución geométrica de parámetro  $0 < p < 1$  toma valores  $1, 2, 3, \dots$  con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad \mathbf{P}(X \geq k) = (1-p)^{k-1}, \quad \text{para cada } k = 1, 2, 3, \dots$$

- Algunos valores de la función de distribución de una variable aleatoria normal  $\mathcal{N}(0, 1)$ :



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
<b>0,0</b>	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
<b>0,1</b>	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
<b>0,2</b>	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
<b>0,3</b>	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
<b>0,4</b>	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
<b>0,5</b>	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
<b>0,6</b>	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
<b>0,7</b>	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
<b>0,8</b>	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
<b>0,9</b>	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
<b>1,0</b>	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
<b>1,1</b>	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
<b>1,2</b>	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
<b>1,3</b>	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
<b>1,4</b>	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
<b>1,5</b>	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
<b>1,6</b>	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
<b>1,7</b>	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
<b>1,8</b>	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
<b>1,9</b>	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
<b>2,0</b>	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
<b>2,1</b>	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
<b>2,2</b>	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
<b>2,3</b>	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
<b>2,4</b>	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
<b>2,5</b>	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
<b>2,6</b>	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
<b>2,7</b>	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
<b>2,8</b>	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
<b>2,9</b>	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
<b>3,0</b>	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990