

Probabilidad I
Segundo de Matemáticas

Examen de febrero, 6-2-2003

1. (a) El avión A tiene dos motores que funcionan independientemente. El avión es capaz de volar con un único motor. El motor izquierdo funciona, antes de estropearse, X_1 horas, donde X_1 es una variable aleatoria que sigue una exponencial de parámetro $\lambda = 1/10$. El motor derecho dura X_2 horas, donde X_2 es también una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 1/10$. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión se mantenga en vuelo al menos 10 horas?

(b) Un nuevo prototipo de avión B funciona con un único motor. Pero, por si acaso, dispone de uno de reserva que se pone en marcha en cuanto el primero falla. El primer motor funciona X_1 horas, mientras que el de reserva, X_2 horas. Ambas variables son exponenciales de parámetro $\lambda = 1/10$. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión B se mantenga en el aire tras 10 horas?

2. (a) Vamos a jugar al siguiente juego. Tenemos dos cofres con joyas: el primero contiene cinco rubíes y dos diamantes, mientras que en el segundo hay un único rubí, junto a diez diamantes. Nos acercamos a ellos con los ojos vendados y extraemos una joya al azar de uno de los cofres. ¿Con qué probabilidad la joya extraída será un diamante?

(b) Ya hemos realizado el experimento y hemos extraído un diamante. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido extraído del segundo cofre?

3. La altura (en centímetros) de los individuos de una población es una variable aleatoria X de media 180 y varianza 49.

(a) Vamos a escoger una persona al azar y vamos a medir su altura. Utilizando la desigualdad de Chebyshev, estima la probabilidad de que obtengamos una medida entre 170 y 190.

(b) Ahora vamos a escoger una muestra de 100 personas, de las que anotaremos sus respectivas alturas. ¿Qué podrías decir ahora sobre la probabilidad de que la *altura media* en esa muestra esté entre 178 y 182?

4. Elegimos, de manera independiente, N números al azar en el intervalo $[0, 1]$ (al azar quiere decir con distribución uniforme, y N será muy grande). Ahora calculamos la media aritmética de los *cuadrados* de estos N números: ¿qué esperamos obtener?

Explica con detalle el sentido de tu respuesta, enunciando el resultado que la justifique.

5. Lanzamos una moneda (con probabilidad p de obtener cara) hasta que obtenemos, completo, el patrón CCC . Llamemos T al (número del) lanzamiento en el que el juego se para, es decir, en el que hemos completado el patrón. ¿Cuánto vale $\mathbf{E}(T)$?

Sugerencia. Condicionar a la siguiente partición: sale X en la primera, o bien sale CX en las dos primeras, o bien CCX en las tres primeras, o bien sale CCC en las tres primeras.

Notas y comentarios:

- La media de tipo cuadrático a la que nos referimos en el ejercicio 4 es la siguiente: dada una lista de números x_1, \dots, x_N , interesa considerar

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^2.$$

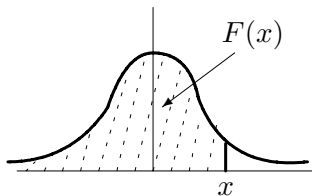
- Una variable X sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si sus funciones de distribución y de densidad son, respectivamente,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0; \end{cases} \quad \text{y} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Una variable aleatoria X con distribución uniforme en el intervalo $[0, a]$ tiene como funciones de distribución y densidad a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ x/a & \text{si } 0 \leq x \leq a; \\ 1 & \text{si } x > a; \end{cases} \quad \text{y} \quad f_X(x) = \begin{cases} 1/a & \text{si } 0 < x < a; \\ 0 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

- Algunos valores de la función de distribución de una variable aleatoria normal de media 0 y varianza 1:



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2,9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3,0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990