**Licenciatura en Matemáticas. Examen de Probabilidad I**

Convocatoria ordinaria, 12 de febrero de 2000

---

**Importante:** Se pide razonar todas las respuestas y escribir los detalles de las soluciones.

---

**1.** El 42% de una población está formado por mujeres. Se sabe que el 24% de las mujeres y el 16% de los hombres están en paro.

a) (1 pto.) Hallar la probabilidad de que una persona, elegida al azar, esté en paro. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga trabajo?

b) (1 pto.) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar entre los parados sea hombre.

---

**2.** Sea $X$ una variable aleatoria con distribución normal estándar y sea $I$ otra variable aleatoria, independiente de $X$ y tal que $P(I=1)=P(I=0)=1/2$. Se define la variable aleatoria $Y$ mediante

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } I=1, \\ -X & \text{si } I=0. \end{cases}$$

a) (1 pto.) Calcular las probabilidades $P(X<1, Y>1)$, $P(X<1)$ y $P(Y>1)$. ¿Son independientes $X$ e $Y$?

b) (1 pto.) Demostrar que $Y$ sigue una distribución normal estándar.

c) (1 pto.) Calcular $E[XY|I=1]$ y $E[XY|I=0]$ y demostrar que $Cov(X,Y)=0$.

---

**3.** Una empresa que alquila coches con conductor ha observado que el número de kilómetros por día de alquiler que se hacen con un determinado tipo de vehículo sigue una distribución $\mathcal{N}(200, \sigma=75)$.

a) (1 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que en 30 días se hagan más de 5.000 kilómetros? ¿Qué hipótesis hay que asumir?

b) (1 pto.) Si la pauta de la compañía es revisar el estado del vehículo si un día se hacen más de 350 km., calcular el número esperado de días que la compañía puede alquilar el vehículo antes de tener que revisarlo y que quede fuera de servicio.

---

**4.** A partir de las variables aleatorias $U_1, \ldots, U_n$, independientes y todas ellas con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, se obtienen las variables $Y_i = -\log U_i$, para $i=1,\ldots,n$.

a) (1 pto.) ¿Qué distribución siguen las variables $Y_1, \ldots, Y_n$? ¿Son independientes?

b) (1 pto.) Sea $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calcular $E(\overline{Y})$, $Var(\overline{Y})$ y demostrar que:

$$\text{Para cualquier } k>0, \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\,\overline{Y}-1\,|>k)=0.$$

c) (1 pto.) ¿Qué distribución sigue $\overline{Y}$?

---

Las notas se publicarán el día 18 de febrero y la revisión será el día 22 de febrero a las 19:00 en el aula CXV-102.