CONSTRUCCIÓN DEL SPLINE CÚBICO

Dados los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, que supondremos dados en orden creciente: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, y dada una función f definida sobre el intervalo $[x_0, x_n]$, queremos construir una función s de clase C^2, que interpole a f en los nodos dados y que sobre cada intervalo con extremos dos nodos consecutivos sea un polinomio cúbico: $s_i = s|_{[x_{i-1},x_i]}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

A fin de determinar los coeficientes de cada polinomio cúbico tomamos como indeterminadas las derivadas segundas de la función s en los nodos: $s''(x_i) = M_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, y vemos como determinarlas en función de los datos:$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Al ser un polinomio lineal, la expresión de cada $s''{}_i$ en términos de las M_i resulta sencilla:

$$s_i''(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} M_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} M_i$$

de forma que al integrar dos veces obtenemos la expresión correspondiente a s_i. Elegimos las constantes de integración de una forma peculiar, que se justifica enseguida al tomar valores en los extremos.

$$s_i'(x) = \tfrac{1}{2}\frac{(x - x_i)^2}{x_{i-1} - x_i} M_{i-1} + \tfrac{1}{2}\frac{(x - x_{i-1})^2}{x_i - x_{i-1}} M_i + A_i + B_i$$

$$s_i(x) = \frac{1}{6}\frac{(x - x_i)^3}{x_{i-1} - x_i} M_{i-1} + \frac{1}{6}\frac{(x - x_{i-1})^3}{x_i - x_{i-1}} M_i + A_i(x - x_{i-1}) + B_i(x - x_i)$$

Si tomamos valores en los extremos:

$$f(x_{i-1}) = \frac{1}{6}(x_{i-1} - x_i)^2 M_{i-1} + (x_{i-1} - x_i)B_i$$

$$f(x_i) = \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})^2 M_i + (x_i - x_{i-1})A_i$$

Y de estas expresiones obtenemos

$$B_i = \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_i} - \frac{1}{6}(x_{i-1} - x_i)M_{i-1}$$

$$A_i = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})M_i$$

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver para determinar las M_i lo obtenemos ahora de las condiciones que nos faltan por usar: las derivadas primeras a la izquierda y a la derecha en cada uno de los nodos interiores x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, coinciden.

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$$

$$s_i'(x_i) = \tfrac{1}{2}(x_i - x_{i-1})M_i + A_i + B_i$$

$$s_{i+1}'(x_i) = \tfrac{1}{2}(x_i - x_{i+1})M_i + A_{i+1} + B_{i+1}$$

Por tanto

$$\frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})M_{i-1} + \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_{i-1})M_i + \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i)M_{i+1} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Se obtiene así un sistema de $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas que queda por tanto indeterminado. Hace falta añadir dos ecuaciones más para tener todas las s_i definidas.

Una de las formas de añadir estas dos ecuaciones extra es poniendo $M_0 = 0$ y $M_n = 0$. Se obtiene así el llamado *spline cúbico natural*.

Otra solución consiste en prescribir los valores de las derivadas primeras en los extremos del intervalo: $f'(x_0)$ y $f'(x_n)$. El resultado así obtenido se denomina *spline cúbico completo*. Se deja como ejercicio el obtener las dos ecuaciones resultantes en los M_i que completan el sistema lineal.