Cálculo Numérico I

Interpolación

El objeto de este capítulo es el estudio de técnicas que permitan manejar una función dada por medio de otra sencilla y bien determinada que la aproxime en algún sentido.

El lector ya conoce la aproximación que de una función de clase C^{k+1} proporciona su polinomio de Taylor de orden k en torno a un punto. Sabemos que, en general, esta aproximación es buena cerca del punto dado. Sin embargo, si queremos obtener una buena aproximación de la función en todo un intervalo tenemos que recurrir a otras técnicas.

Estudiaremos en primer lugar la interpolación polinómica y más adelante la interpolación por medio de polinomios osculadores y por *splines*.

Algunas otras posibilidades que no estudiaremos: interpolación por funciones racionales, ajuste por mínimos cuadrados, series de Fourier, *wavelets*.

12 Interpolación polinómica

Sea $f(x)$ una función, que en todo este capítulo supondremos al menos continua, definida sobre un intervalo $[a, b]$. Ya sea porque el calcular los valores de f requiere un cierto trabajo ya porque la función f no es totalmente conocida —digamos que podemos calcular experimentalmente unos cuantos valores de f— queremos sustituir f por una función sencilla con la propiedad de coincidir con f en ciertos puntos de $[a, b]$. Nos ocuparemos en principio del caso en el que la función sencilla que buscamos es un polinomio del menor grado posible. Si el número de puntos distintos del intervalo $[a, b]$ sobre los que queremos que el polinomio coincida con la función es de $k + 1$ entonces siempre podremos encontrar un polinomio de grado k.

13 Forma de Lagrange

Teorema 3 (Existencia y unicidad). *Dados* (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_n, y_n), *puntos de* $\mathbb{R}^2$ *verificando la propiedad de que, si* $i \neq j$, $x_i \neq x_j$, *existe un único polinomio* $\mathbb{P}_n$ *de grado menor o igual que* n *que verifica* $\forall i = 0, 1, \ldots, n$, $\mathbb{P}_n(x_i) = y_i$.

Demostración. Obsérvese primero que para cada j es muy fácil construir un polinomio $L_j(x)$ de grado menor o igual que n que tiene ceros en los puntos x_i, $i \neq j$, $i = 0, 1, \ldots, n$; sea éste por ejemplo $\prod_{i=0,i\neq j}^{n}(x - x_i)$. Si además queremos que tome un determinado valor en x_j no tendremos más que multiplicarlo por la constante adecuada:

$$L_j(x) = \frac{\prod_{i=0,i\neq j}^{n}(x - x_i)}{\prod_{i=0,i\neq j}^{n}(x_j - x_i)}$$

toma el valor 1 en $x = x_j$.

A partir de estos polinomios L_j es muy fácil construir el polinomio buscado. Éste será

$$\mathbb{P}_n(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j(x).$$

Ésta es la llamada forma de Lagrange del polinomio interpolador.

La unicidad del polinomio interpolador se deduce del teorema fundamental del álgebra de la siguiente manera: si Q fuese otro polinomio interpolador de grado menor o igual que n entonces la diferencia $\mathbb{P} - Q$ tendría $n + 1$ ceros distintos $x_0, x_1, \ldots x_n$, siendo un polinomio de grado n, y por tanto sería idénticamente nula. $\square$

La demostración que hemos dado es una demostración constructiva del polinomio interpolador. En el siguiente ejemplo utilizamos este método para construir el polinomio interpolador pedido.

Ejemplo 13.1. *Hallar el polinomio interpolador de los puntos* $(-1, 3)$, $(0, -2)$, $(2, 4)$.

Construiremos $L_i(x), i = 0, 1, 2$ tales que $L_i(x_j) = \delta_i^j$ (*delta de Kronecker*) con $x_j = -1, 0, 2$ para $j = 0, 1, 2$ respectivamente.

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)}{(-1)(-3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{1(-2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)x}{3 \cdot 2}$$

El polinomio buscado será

$$\begin{aligned} P(x) &= 3 \cdot L_0(x) - 2 \cdot L_1(x) + 4 \cdot L_2(x) \\ &= x(x-2) + (x+1)(x-2) + (2/3)(x+1)x \\ &= (8/3)x^2 - (7/3)x - 2. \end{aligned}$$

14 Forma de Newton. Diferencias divididas

La forma del polinomio interpolador que hemos obtenido es la llamada forma de Lagrange. Su expresión, aún siendo sencilla, tiene la dificultad de que para n grande no solamente hace falta un gran número de cálculos sino que además si quisiéramos aumentar en una unidad —con el fin de mejorar la aproximación— el grado del polinomio interpolador, tendríamos que realizar nuevamente todo el cálculo. Sin embargo la forma de Lagrange sería rentable si tuviéramos que calcular el polinomio interpolador de varias funciones sobre los mismos nodos.

Buscaremos ahora otra forma en la cual el polinomio interpolador de grado $n+1$ se expresa como una corrección del polinomio interpolador de grado n.

Sean $\mathbb{P}_n$ y $\mathbb{P}_{n+1}$ los polinomios interpoladores de una función f con nodos en los puntos $x_0, \ldots, x_n$ y $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}$ respectivamente. Como ambos polinomios coinciden en los $n+1$ primeros nodos su diferencia será cero en ellos y al ser esta diferencia un polinomio de grado menor o igual que n se tendrá que $\mathbb{P}_{n+1} - \mathbb{P}_n = C(x - x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Éste será pues el término corrector a falta de determinar la constante C. Su valor podrá calcularse evaluando esta diferencia en el punto x_{n+1}

$$C = \frac{f(x_{n+1}) - \mathbb{P}_n(x_{n+1})}{(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)}.$$

El valor de esta constante C puede calcularse de diversas maneras. Para expresarlo directamente en términos de los nodos y de los valores de la función f en ellos puede compararse con el coeficiente principal de la forma de Lagrange del polinomio interpolador

$$C = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}. \tag{14.1}$$

Otra forma de obtener este coeficiente C será por recurrencia respecto de los coeficientes principales de polinomios interpoladores de menor grado. Si se escribe el polinomio interpolador de los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ de la forma

$${\mathbb{P}_n}^{x_0,\ldots,x_n}(x) = \frac{(x-x_0)\mathbb{P}_{n-1}^{x_1,\ldots,x_n}(x) - (x-x_n)\mathbb{P}_{n-1}^{x_0,\ldots,x_{n-1}}(x)}{x_n - x_0}$$

entonces se observa que el coeficiente principal $C = a_n^{x_0,\ldots,x_n}$ será igual a la siguiente combinación de los coeficientes principales de los otros dos:

$$a_n^{x_0,\ldots,x_n} = \frac{a_{n-1}^{x_1,\ldots,x_n} - a_{n-1}^{x_0,\ldots,x_{n-1}}}{x_n - x_0}$$

Los coeficientes a_k se irán entonces calculando comenzando por los a_0:

$$a_0^{x_i} = f(x_i)$$

y a partir de ellos iteradamente

$$a_1^{x_i,x_j} = \frac{a_0^{x_j} - a_0^{x_i}}{x_j - x_i} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \stackrel{\mathbf{def}}{=} f[x_i, x_j]$$

$$a_2^{x_i,x_j,x_k} = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \stackrel{\mathbf{def}}{=} f[x_i, x_j, x_k]$$

y en general

$$a_k^{x_0,\ldots,x_k} = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \stackrel{\mathbf{def}}{=} f[x_0, \ldots, x_k]$$

Por esta razón las $f[x_0, \ldots, x_k]$ reciben el nombre de *diferencias divididas de Newton* de orden k de la función f con nodos en los puntos $x_0, \ldots, x_k$. Las diferencias divididas de orden cero son simplemente los valores de la función en los nodos.

15 Acotación del error

Si los y_i son los valores de una función f en los respectivos x_i llamaremos a $\mathbb{P}$ el polinomio interpolador de f con *nodos* en los puntos x_i. El polinomio $\mathbb{P}$ coincide con la función f en los puntos x_i y nos gustaría saber cual es la desviación entre ambos en cualquier otro punto. Tratemos de evaluar esta desviación en un punto $x = t$. Observemos que la función error $E(x) = \mathbb{P}(x) - f(x)$ tiene ceros en los puntos $x_0, \ldots, x_n$ y por tanto coincidirá sobre ellos con el polinomio $L(x) = C(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Tomando un valor adecuado de la constante C podemos hacer que ambas funciones E y L coincidan también en el punto t. Supongamos que la función f es de clase C^{n+1}. Su diferencia $L(x) - E(x)$ tiene $n+2$ ceros distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n, t$ y por tanto la derivada de orden $n+1$ de esta diferencia tiene al menos un cero ξ en el intervalo más pequeño $I(x_0, x_1, \ldots, x_n, t)$ que contiene a estos puntos.

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(L(x) - E(x)\right) \Big|_{x=\xi} = C(n+1)! + f^{(n+1)}(\xi) = 0$$

y por tanto

$$C = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

así

$$E(t) = \mathbb{P}(x) - f(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

y esta fórmula del error es válida para todo t, teniendo en cuenta que el punto ξ depende de t. Si se quiere una acotación válida en todo un intervalo bastará tomar una cota superior de $f^{(n+1)}$ en este intervalo.

En todo el desarrollo que precede hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4. *Sea f una función de clase C^{n+1} en un intervalo $[a,b]$ de la recta. Sea $\mathbb{P}$ el polinomio interpolador de f con nodos en los puntos $x_0,\ldots,x_n \in [a,b]$. Entonces para todo $t\in[a,b]$ existe $\xi \in I(x_0,\ldots,x_n,t)$ tal que*

$I(x_0,\ldots,x_n)$ es el menor intervalo de $\mathbb{R}$ que contiene a todos los x_i, $i=0,\ldots,n$.

$$f(t) - \mathbb{P}(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Si la función f no es derivable se puede obtener una fórmula del error análoga de la siguiente manera: fijamos el punto x en el que queremos estimar el error y hallamos el polinomio $\mathbb{P}_{n+1}$ que interpola a f en los nodos $x_0,\ldots,x_n$, y x. La forma de Newton para el polinomio interpolador nos da

$$\mathbb{P}_{n+1}(t) = \mathbb{P}_n(t) + f[x_0,\ldots,x_n,x](t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

y por tanto

$$f(x) - \mathbb{P}_n(x) = \mathbb{P}_{n+1}(x) - \mathbb{P}_n(x) = f[x_0,\ldots,x_n,x](x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

De todo lo visto hasta ahora podemos deducir las siguientes propiedades de las diferencias divididas.

1. $$f[x_0,\ldots,x_n] = \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}.$$

2. Para toda permutación $(i_0,i_1,\ldots,i_n)$ de $(0,1,\ldots,n)$
$$f[x_0,\ldots,x_n] = f[x_{i_0},\ldots,x_{i_n}].$$

3. Si $f\in C^n[a,b]$ entonces
$$\lim_{x_0,\ldots,x_n\to x} f[x_0,\ldots,x_n] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$
siempre que $x_0,\ldots,x_n,x\in[a,b]$.

Nota 1. La propiedad 3. precedente es consecuencia directa de las dos fórmulas de acotación del error recién vistas. Es más, en ellas se demuestra que existe $\xi \in I(x_0, \ldots, x_n)$ tal que $f[x_0, \ldots, x_n] = f^{(n)}(\xi)/n!$.

En ambas fórmulas de error aparece el polinomio $L(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$. Para acotar el error de interpolación tenemos que estudiar el tamaño de $L(x)$. En general, esta estimación es complicada; sin embargo, cuando los nodos están igualmente separados, caso común en la práctica, la acotación resulta ser más accesible.

Si h es la distancia entre dos nodos consecutivos, por medio de un cambio lineal de variable podemos reducir el polinomio a una de las dos formas siguientes:

$$\begin{aligned} L(x) &= (x - kh)\cdots(x-h)x(x+h)\cdots(x+kh) \\ &\quad (L \text{ de grado impar}) \\ L(x) &= (x - \frac{2k+1}{2}h)\cdots(x - \frac{1}{2}h)(x + \frac{1}{2}h)\cdots(x + \frac{2k+1}{2}h) \\ &\quad (L \text{ de grado par}) \end{aligned}$$

y estudiar el máximo de $|L(x)|$ en $I(x_0, \ldots, x_n)$ o, con mayor precisión, entre cada par de nodos consecutivos.

Estimación para la interpolación lineal.

$$|E(x)| = \frac{1}{2} \sup_{\xi \in I(x_0,x_1)} |f''(\xi)||(x-x_0)(x-x_1)|$$

El polinomio $|(x-x_0)(x-x_1)|$ alcanza su máximo dentro del intervalo $[x_0, x_1]$ en su punto medio y este máximo vale $\frac{1}{4}h^2$.

Estimación para la interpolación cuadrática.

$$|E(x)| \leq \frac{1}{6} \sup_{\xi \in I(x_0,x_1,x_2)} |f'''(\xi)||(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

El máximo de $|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$ en $[x_0, x_1]$ será el mismo que el de $|(x-h)x(x+h)|$ y este vale $\frac{2\sqrt{3}}{3}h^3$. Por tanto

$$|E(x)| \leq M\frac{\sqrt{3}}{9}h^3 \qquad \text{donde} \quad M = \sup_{\xi \in I(x_0,x_1,x_2)} |f'''(\xi)|$$

Estimación para la interpolación cúbica.

$$|E(x)| \leq \frac{1}{24} \sup_{\xi \in I(x_0,x_1,x_2,x_3)} |f^{\mathsf{iv}}(\xi)||(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|.$$

Analizamos el polinomio $(x - \frac{3}{2}h)(x - \frac{1}{2}h)(x + \frac{1}{2}h)(x + \frac{3}{2}h)$. Su máximo valor absoluto en el intervalo $[-\frac{3}{2}h, \frac{3}{2}h]$ es h^4.

También podemos analizar por separado su máximo en el intervalo $[-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h]$. Éste es $\frac{9}{16}h^4$; por tanto en este intervalo

$$|E(x)| \leq \frac{3}{128}Mh^4, \qquad \text{donde ahora} \quad M = \sup_{\xi\in[x_0,x_3]} |f^{\mathsf{iv}}(\xi)|.$$

16 Interpolación osculatoria

Recordemos una de las formas en las que se obtiene el polinomio de Taylor: dada una función f, de clase n, y su valor y los valores de sus n primeras derivadas en un punto x_0 hallar el polinomio del menor grado posible que tiene estos mismos valores. Escribiendo el polinomio en función de sus coeficientes (por simplicidad, en potencias de $x - x_0$) podemos determinarlos con los $n + 1$ datos y por tanto el polinomio tendrá grado menor o igual que n.

Si en el la fórmula de Newton del polinomio interpolador de $n + 1$ puntos hacemos que todos ellos tiendan a uno, sea este x_0, observamos, dadas las propiedades de las diferencias divididas, que nuestro polinomio se convierte en el de Taylor.

Podemos imaginar cualquier situación intermedia en la que agrupemos los nodos en varias clases y todos los correspondientes a una clase tiendan a uno dado. Obtenemos así un *polinomio interpolador osculador*, llamado también *polinomio de Hermite* en el cual se tienen un cierto número de nodos y en cada uno de estos se conocen los valores de las derivadas hasta un cierto orden. El grado de este polinomio sería una unidad menor a la suma de los órdenes de las derivadas que se conocen en cada nodo. Por ejemplo, si tenemos nodos x_i, $i = 1, \dots, k$, y el número de derivadas conocidas en x_i es n_i, entonces el grado del polinomio interpolador osculador será $n_1 + n_2 + \cdots + n_k - 1$. Los casos del polinomio interpolador ordinario (llamado también *polinomio de Lagrange*) y del polinomio de Taylor son los extremales de esta situación.

polinomio interpolador osculador

polinomio de Hermite

Vamos a estudiar un sólo caso particular de polinomio interpolador osculador: aquel en el que en cada nodo conocemos el valor de la función y el valor de su primera derivada. De hecho vamos a estudiar solamente el caso en el cual tenemos dos nodos: x_0, x_1. En este caso al tener cuatro datos el polinomio osculador será de grado menor o igual que *tres*; suele denominarse *polinomio cúbico de Hermite*. Podemos plantear el sistema de ecuaciones

polinomio cúbico de Hermite

$$\begin{aligned}
a+bx_0+ \quad & cx_0^2+dx_0^3 = & f(x_0) \\
a+bx_1+ \quad & cx_1^2+dx_1^3 = & f(x_1) \\
b+ \quad & 2cx_0+3dx_0^2 = & f'(x_0) \\
b+ \quad & 2cx_1+3dx_1^2 = & f'(x_1);
\end{aligned}$$

también podemos partir de la forma de Newton del polinomio interpolador y concentrar los cuatro nodos dos a dos sobre x_0, x_1. Las diferencias divididas de primer orden sobre puntos que convergen al mismo nodo convergen a la derivada de forma que una colección de diferencias divididas puede calcularse según la siguiente tabla

x_0	$f(x_0)$			
		$f'(x_0)$		
x_0	$f(x_0)$		$\dfrac{f[x_0,x_1]-f'(x_0)}{x_1-x_0}$	
		$f[x_0,x_1]$		$\dfrac{f'(x_1)-2f[x_0,x_1]+f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2}$
x_1	$f(x_1)$		$\dfrac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]}{x_1-x_0}$	
		$f'(x_1)$		
x_1	$f(x_1)$			

Ejemplo 16.1. Polinomio osculador que interpola a la función $f(x)$ con datos $f(0)=f(\pi)=0$, $f'(0)=1$, $f'(\pi)=-1$ (estos datos corresponden a la función $\operatorname{sen} x$. Las diferencias divididas relevantes son: $f(0)=0$, $f[0,0]=f'(0)=1$, $f[0,0,\pi]=-1/\pi$, $f[0,0,\pi,\pi]=0$, por lo que el polinomio buscado es $P(x)=x-x^2/\pi$.

Una acotación del error en este polinomio puede calcularse por medio de la misma fórmula que en el caso del polinomio interpolador ordinario, repitiendo ahora los nodos: $|\varepsilon(x)|\leq\frac{1}{4!}\sup|f^{(4)}(x)||(x-x_0)^2(x-x_1)^2|$.

En el ejemplo anterior, sabido que la función interpolada es $\operatorname{sen} x$, se obtiene la cota $\frac{1}{4!}(\pi/2)^4\leq 0'26$

17 Splines

En todo lo anterior hemos aproximado una función dada por medio de un polinomio de un cierto grado en *todo* un intervalo. Observando cualquiera de las fórmulas de error que hemos obtenido se ve que éste depende de la longitud del intervalo $[a,b]$. Por ejemplo, si el grado del polinomio es 2, una cota superior grosera del error será proporcional a $(\frac{(b-a)}{2})^3$. As , una estrategia para encontrar una aproximación a la función f podr a ser la de subdividir el intervalo de partida $[a,b]$ y hallar en cada uno de los subintervalos resultantes un polinomio interpolador de grado bajo en vez de aumentar el grado del polinomio interpolador en todo $[a,b]$.

El procedimiento anterior tiene el defecto de que si bien la función global resultante es continua, en los puntos de unión de subintervalos consecutivos no será, generalmente derivable. Si se quiere conseguir una función de aproximación que sea de orden C^l y que restringida a cada uno de los n subintervalos sea un polinomio de grado k tendrán que calcularse $n(k+1)$ coeficientes y para ello se tendrán $2n+l(n-1)$ condiciones —valores de cada polinomio en los extremos de su subintervalo, coincidencia de derivadas a izquierda y derecha en cada punto común a dos subintervalos—; para evitar incompatibilidades queremos que el número de condiciones sea menor o igual que el número de constantes a determinar, por tanto $n(k-l-1)+l \geq 0$ para que este número sea independiente del número de subintervalos $k-l-1=0$, y nos quedarán entonces $l=k-1$ constantes por determinar. Las funciones de aproximación del tipo descrito se denominan *splines*. SPLINES

Ejemplo 17.1. **Spline cúbico.** Dada una función f en el intervalo $[a,b]$ y una partición de éste $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ se busca una función $s(x)$ cuya restricción al subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$ será un polinomio $s_i(x)=a_0^i+a_1^ix+a_2^ix^2+a_3^ix^3$ que cumpla las condiciones $s_i(x_{i-1})=f(x_{i-1})$, $s_i(x_i)=f(x_i)$, $s_{i-1}^{(k)}(x_{i-1})=s_i^{(k)}(x_i)$, $k=1,2$.

El número total de constantes a_i^j a deteminar será de $4n$. El número total de ecuaciones disponible es de $2n+2(n-1)=4n-2$. Tendremos pues dos grados de libertad que completaremos de diversas maneras.

Ejemplo 17.2. **Spline cúbico natural.** Los dos grados de libertad restantes se determinarán forzando $s''(x_0)=s''(x_n)=0$.

Ejemplo 17.3. **Spline cúbico completo.** Los dos grados de libertad restantes se determinarán fijando $s'(x_0)=f'(x_0)$, $s'(x_n)=f'(x_n)$.

Construcción de splines cúbicos

Dados los nodos $x_0,x_1,\ldots,x_n$, que supondremos dados en orden creciente: $x_0<x_1<\cdots<x_n$, y dada una función f definida sobre el intervalo $[x_0,x_n]$, queremos construir una función s de clase C^2, que interpole a f en los nodos dados y que sobre cada intervalo con extremos dos nodos consecutivos sea un polinomio cúbico: $s_i=s|_{[x_{i-1},x_i]}$, $i=1,2,\ldots,n$.

A fin de determinar los coeficientes de cada polinomio cúbico tomamos como indeterminadas las derivadas segundas de la función s en los nodos: $s(x_i)=M_i$, $i=0,1,\ldots,n$, y vemos como determinarlas en función de los datos:$f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$.

Al ser un polinomio lineal, la expresión de cada ${s''}_i$ en términos de las M_i resulta sencilla:

$$s_i''(x)=\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}M_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}M_i$$

de forma que al integrar dos veces obtenemos la expresión correspondiente a s_i. Elegimos las constantes de integración de una forma peculiar, que se justifica enseguida al tomar valores en los extremos.

$$s_i'(x) = \tfrac{1}{2}\frac{(x-x_i)^2}{x_{i-1}-x_i}M_{i-1} + \tfrac{1}{2}\frac{(x-x_{i-1})^2}{x_i-x_{i-1}}M_i + A_i + B_i$$

$$s_i(x) = \frac{1}{6}\frac{(x-x_i)^3}{x_{i-1}-x_i}M_{i-1} + \frac{1}{6}\frac{(x-x_{i-1})^3}{x_i-x_{i-1}}M_i + A_i(x-x_{i-1}) + B_i(x-x_i)$$

Si tomamos valores en los extremos:

$$f(x_{i-1}) = \frac{1}{6}(x_{i-1}-x_i)^2 M_{i-1} + (x_{i-1}-x_i)B_i$$

$$f(x_i) = \frac{1}{6}(x_i-x_{i-1})^2 M_i + (x_i-x_{i-1})A_i$$

Y de estas expresiones obtenemos

$$B_i = \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1}-x_i} - \frac{1}{6}(x_{i-1}-x_i)M_{i-1}$$

$$A_i = \frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{1}{6}(x_i-x_{i-1})M_i$$

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver para determinar las M_i lo obtenemos ahora de las condiciones que nos faltan por usar: las derivadas primeras a la izquierda y a la derecha en cada uno de los nodos interiores x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, coinciden.

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$$

$$s_i'(x_i) = \tfrac{1}{2}(x_i - x_{i-1})M_i + A_i + B_i$$
$$s_{i+1}'(x_i) = \tfrac{1}{2}(x_i - x_{i+1})M_i + A_{i+1} + B_{i+1}$$

Por tanto

$$\frac{1}{6}(x_i-x_{i-1})M_{i-1} + \frac{1}{3}(x_{i+1}-x_{i-1})M_i + \frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)M_{i+1} = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Se obtiene así un sistema de $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas que queda por tanto indeterminado. Requerimos añadir dos ecuaciones más para tener todas las s_i definidas.

Como se indica en el ejemplo 17.2, una de las formas de añadir estas dos ecuaciones extra es poniendo $M_0 = 0$ y $M_n = 0$. Se obtiene así el llamado *spline cúbico natural*.

Otra solución es la del ejemplo 17.3, que consiste en prescribir los valores de las derivadas primeras en los extremos del intervalo: $f'(x_0)$ y $f'(x_n)$. El resultado así obtenido se denomina *spline cúbico completo*.

Se deja como ejercicio el obtener las dos ecuaciones resultantes en los M_i que completan el sistema lineal.