1. Resuelve por el método de eliminación de Gauss el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Escribe la descomposición $A = LU$.

2. Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 6x+ & 2y+ & 2z = & -2 \\ 2x+ & (2/3)y+ & (1/3)z = & 1 \\ x+ & 2y- & z = & 0 \end{array} \right.$$

a. comprueba que su solución es $x = 2'6$, $y = -3'8$, $z = -5'0$;
b. trabajando con mantisa de cuatro dígitos resuelve por Gauss *sin* utilizar pivote parcial;
c. trabajando de nuevo con mantisa cuatro dígitos resuelve por Gauss utilizando pivote parcial.

3. Dada la ecuación

$$x(s) - \int_0^s \cos(\pi t) x(t) dt = 1$$

a. tomando $x(0) = x_0$, $x(1/4) = x_1$, $x(1/2) = x_2$, $x(3/4) = x_3$, $x(1) = x_4$, como incógnitas aproxima el valor de la integral con nodos en estos puntos y resuelve el sistema lineal que resulta;
b. resuelve analíticamente la ecuación y compara con el resultado numérico obtenido antes.

4. Hallar las matrices de Jacobi y de Gauss–Seidel para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar los autovalores de las matrices anteriores y determinar si los métodos iterativos correspondientes son o no convergentes.

5. El cálculo de los elementos de un *spline* cúbico natural con seis nodos igualmente separados plantea un sistema tridiagonal de la forma

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

a. Resuelve el sistema por el método de eliminación de Gauss.
b. Escribe esplícitamente la descomposición LU.

6.
a. Calcula el número de condición de la matriz de Hilbert 3×3

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}. \qquad \text{Sea} \qquad b = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

b. Resuelve el sistema $H_3 X = b$ trabajando con mantisa de cuatro dígitos. Compara el resultado obtenido con el resultado correcto.
c. Demuestra que la solución de $H_3 X = b$ da los coeficientes del polinomio de segundo grado que mejor aproxima cuadráticamente a la función $f(x) = 5x^3$, $x \in [0, 1]$. (Nota: el polinomio $p(x)$ de grado 2 que mejor aproxima cuadráticamente a una función f en el intervalo $[0, 1]$ es el que minimiza la integral $\int_0^1 |f(x) - p(x)|^2 dx$ cuando p var a sobre todos los polinomios de grado menor o igual que 2.)

7.
a. Escribe la matriz A de orden n dada por $a_{ij} = 2$ si $i = j$, $a_{ij} = 1$ si $i = j - 1$ ó $i = j + 1$ y $a_{ij} = 0$ en el resto de los casos.
b. Demuestra que A tiene determinante no nulo probando que el sistema lineal $AX = 0$ tiene solución única. (Sugerencia: demuestra que si $\alpha = \max 1 \leq i \leq n |x_i|$, donde $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ es solución del sistema, entonces $\alpha = 0$.)