

1. Utiliza la cuadratura de Lobatto para calcular

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1/3}$$

con tres cifras decimales correctas.

2. Calcula

$$\int_0^1 (e^x - \cos x)^{-1/2} dx$$

con cinco cifras decimales correctas.

3. La regla del punto medio aproxima $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ mediante

$$M_1(f) = (b - a)f\left(\frac{b + a}{2}\right).$$

Demuestra que si f es una función con dos derivadas continuas el error $EM_1(f) = I(f) - M_1(f)$ de esta aproximación es

$$EM_1(f) = \frac{(b - a)^3}{24} f''(\alpha), \quad \alpha \in [a, b]$$

Encuentra la regla compuesta del punto medio y su error como aproximación de $I(f)$. Estudia el comportamiento asintótico del error en la regla compuesta del punto medio y enuncia una regla del punto medio corregida.

4. Usa las ideas consideradas para las cuadraturas gaussianas, para hallar una fórmula de cuadratura de la forma

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \equiv I_2(f)$$

que sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 3. Aplica esta fórmula para aproximar $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx = 0.37894469164$.

5. Se quiere hallar una regla de diferenciación numérica para f''' de la forma

$$f'''(x) \approx Af(x - 2h) + Bf(x - h) + Cf(x) + Df(x + h) + Ef(x + 2h)$$

utiliza el método de los coeficientes indeterminados para hallar A, B, C, D, E . Encuentra a continuación una fórmula para el error.

6. Utiliza la fórmula de derivación numérica

$$f''(x) \approx \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$$

para calcular $f''(0)$, donde $f(x) = \cos x$, con un error menor que 10^{-5} . Estima el error.

7. Enuncia una regla numérica para la derivada cuarta y analiza su precisión.

8. Utiliza la regla numérica $x'(t) = (x(t + h) - x(t))/h$ para obtener los valores aproximados, en los puntos $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, de la única función que verifica $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$.

9. **(Programa)** Halla una regla para la derivada primera de la forma

$$f'(x) \approx Af(x - 2h) + Bf(x - h) + Cf(x) + Df(x + h) + Ef(x + 2h).$$

Programa la fórmula recién obtenida para calcular el valor de la derivada de la función

x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	3.164674	3.215827	3.261584	3.302977	3.340765	3.375527	3.407712	3.437675
x	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	
$f(x)$	3.465704	3.492033	3.516857	3.540338	3.562614	3.583803	3.604007	

en los puntos 1.0, 1.1, 1.2, ..., 1.9, 2.0. Haz una estimación global del error.