1. **(Programa)** Escribe un programa que calcule $I = \int_1^3 5xe^{-x}\ln x\,dx$ usando la regla de Simpson para valores pares de n desde 2 hasta 20. El valor de I con 10 decimales correctos es $I = 1'5282059280$. Compara el error cometido al usar la regla de Simpson con el error teórico deducido para esta regla (haz que aparezcan estas diferencias en dos columnas paralelas para establecer la comparación). Finalmente, comprueba empíricamente la estimación asintótica del error para la regla de Simpson.

2. Demuestra que si los puntos $x_0, \ldots, x_n$ son simétricos respecto del centro m de un intervalo I, es decir $x_k + x_{n-k} = 2m$, y si n es par entonces el método $\int_I f \approx \int_I P_f^{x_0,\ldots,x_n}$ es exacto para polinomios de grado $\leq n+1$.

3. Se quiere construir una tabla para la distribución normal
$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
para $x > 0$, que produzca por interpolación lineal un error menor que $5\cdot 10^{-6}$
a. determina cuál debe ser el paso de la tabla;
b. determina con cuántas cifras decimales deben calcularse las integrales;
c. calcula $N(1), N(2), N(3)$, y $N(4)$.

4. Calcula los nodos y los pesos de las cuadraturas de Gauss I_6 e I_7. (Tendrás que utilizar un método de aproximación de ceros de polinomios.)

5. Utiliza las cuadraturas de Gauss I_4 e I_5 para calcular el valor aproximado de
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

6. Utiliza la fórmula de Taylor con resto para calcular
$$\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$$
con error menor que 10^{-4}. Repite el cálculo utilizando la regla compuesta del trapecio. Compara el número de evaluaciones realizado en ambos métodos.

7. El teorema de los números primos establece que el número de primos en el intervalo $a < x < b$ es aproximadamente igual a
$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x}.$$
Utiliza esta fórmula para $a = 100$ y $b = 200$ y compara el resultado con el número exacto de primos en este intervalo.

8. La regla de integración de Lobatto aproxima $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx$ mediante
$$L_n(f) = p_1 f(-1) + p_2 f(1) + \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)\,,$$
donde los pesos $p_1, p_2, w_1, \cdots w_n$ y los nodos $x_1, \cdots x_n$ se calculan imponiendo que integre de manera exacta todos los polinomios de grado menor o igual que $2n+1$. Escribe el sistema cuya solución son estos pesos y estos nodos. Encuentra los valores de los pesos y los nodos para $n = 2$. Aproxima
$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1/3}dx \qquad \text{mediante } L_2(f).$$

9. **(Programa)** Escribe un programa que calcule
$$I = \int_1^3 5xe^{-x}\ln x\,dx$$
usando las fórmulas de integración gausiana para valores de n desde 1 hasta 7. Observa la velocidad de convergencia de este tipo de integración.