1. Se quiere construir una tabla de logaritmos decimales para los valores de x entre 1 y 10, de forma que interpolando linealmente sus valores se obtengan cuatro cifras decimales correctas. Determina cuál debe ser el paso de la tabla y cuantas cifras decimales correctas deben tener los valores de la tabla.

2. Se conocen los siguientes datos de una función $f(x)$:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0'4	1'554284	0'243031
0'5	1'561136	-0'089618

Estima el valor de f para $x = 0'473$.

3. Considera el polinomio $\Psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ para nodos igualmente espaciados entre sí una distancia h. Demuestra que

$$|\Psi(x)| \leq n!h^{(n+1)}, \qquad x_0 \leq x \leq x_n.$$

Si $P_n(x)$ es el polinomio de interpolación de la función $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$, usa el resultado anterior para demostrar que

$$\max_{0\leq x\leq 1} |e^x - P_n(x)| \to 0 \quad \text{cuando}\, n \to \infty \ .$$

4. De una función $f(x)$, de clase C^3, se conocen las siguientes cotas:

$$1 \leq f'(x) \leq 3, \qquad |f''(x)| \leq 1, \qquad |f^{(3)}(x)| \leq 1, \qquad |f^{(4)}(x)| \leq 1,$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. Tenemos, además, la siguiente tabla de valores exactos:

x	0'4	0'5	0'6	0'7
$f(x)$	1'1894183	1'4794255	1'7646425	2'0442177

Determina la solución α a la ecuación $f(x) = 1'5$ con un error menor que $0'0001$. (Interpola la inversa $f^{-1}(y)$).

5. Cuando los nodos x_i están igualmente espaciados, las fórmulas para las diferencias divididas y para los polinomios de interpolación se simplifican. Define

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x), \qquad \Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \qquad \Delta_h^2 f(x) = \Delta_h^1 f(x+h) - \Delta_h^1 f(x).$$

Demuestra que si $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_1 + h$,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2!h^2}\Delta_h^2 f(x_0).$$

Usa este resultado para demostrar que

$$p_2(x) = \sum_{j=0}^{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} \Delta_h^j f(x_0), \qquad \alpha = \frac{x - x_0}{h}.$$

6. Determina si la siguiente función es un spline cúbico en el intervalo $[0, 2]$:

$$s(x) = (x-1)^3 \quad \text{en} \quad [0,1], \qquad s(x) = 2(x-1)^3 \quad \text{en} \quad [1,2].$$

7. Halla el spline cúbico natural ($s''(x_0) = 0 = s''(x_n)$) y el spline cúbico completo que interpolan los datos

a.

x	0	1	2	3
y	0	1	-1	0
y'	1			1.

b.

x	1/2	1	2	3
y	2	1	1/2	1/3
y'	-4			-1/9