1. Dada la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ se quiere aproximar su raíz $x = 2$ partiendo de un valor próximo x_0 por algún método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$.
a. Estudia la convergencia del método $F(x) = x^2 - 2$ obtenido a partir de $x = x^2 - 2$.
b. Estudia la convergencia del método $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ obtenido a partir de $x^2 = x + 2$.
c. Halla una constante k tal que el método $x_{n+1} = x_n + k(x_n^2 - x_n - 2)$ sea convergente cerca de $x = 2$. Determina sobre qué intervalo el método es convergente para la constante k obtenida.

2. Prueba que la ecuación $e^x - 100x^2 = 0$ tiene exactamente tres soluciones reales y halla intervalos de longitud $0'1$ que las contengan.
Observa que cada una de las ecuaciones

$$x = \frac{e^{x/2}}{10}, \qquad x = 2(\log x + \log 10), \qquad x = -\frac{e^{x/2}}{10},$$

es equivalente a la dada (al menos en un intervalo de la recta) y verifica que cada una de ellas define un método iterativo convergente para al menos una de las soluciones de la ecuación. Indica a que raíz converge cada método. Aproxima con error menor que 10^{-3} la mayor de las raíces utilizando el método correspondiente.

3. Se consideran sucesiones definidas por las siguientes leyes de iteración:

$$\textbf{a}.\ x_{n+1} = -16 + 6x_n + \frac{12}{x_n} \qquad \textbf{b}.\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^2} \qquad \textbf{c}.\ x_{n+1} = \frac{12}{1 + x_n}$$

Determina sobre qué intervalos de la recta convergen y cuál será el límite.

Tema 3.— Interpolación

4. Halla los polinomios interpoladores de segundo y tercer grado con nodos en los puntos $0, 1, -1$ y $-2, -1, 1, 2$ respectivamente de las funciones: **a.** $f(x) = x$, **b.** $f(x) = x^2$, **c.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, **d.** $f(x) = 1/(2x + 1)$, **e.** $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Compara los polinomios obtenidos con las funciones correspondientes. Decide cuál es el polinomio interpolador de grado $n + k$ de un polinomio de grado n.

5. Halla el polinomio interpolador de tercer grado de la función $\operatorname{sen} x$ con nodos en los puntos $0, \pi/4, 3\pi/4, \pi$. Halla el polinomio interpolador de cuarto grado con nodos en los puntos $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$. En ambos casos da una cota superior del error.

6. A partir de la siguiente tabla de logaritmos decimales

x	1'0	1'5	2'0	3'0	3'5
$\log x$	0'00000	0'17609	0'30103	0'47712	0'54407

forma una tabla de diferencias divididas y utilízala para estimar $\log 1'25$ y $\log 2'5$ por interpolación cúbica. Estima el error de estas aproximaciones. Compara la diferencia de los valores calculados con el valor de $\log 2$.

7. Dada la tabla

x	0'0	0'2	0'4	0'6	0'8	1'0
$\arctan x$	0'000000	0'197396	0'380506	0'540420	0'674741	0'785398

halla el valor de $\arctan(0'67)$ con tres dígitos correctos utilizando la interpolación polinómica adecuada al caso. Utilizando la tabla en sentido contrario determina por el mismo método el valor de $\tan(\pi/6)$ con tres dígitos correctos.

8. **(Programa)** Escribe un programa que calcule las diferencias divididas para la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

en nodos igualmente espaciados del intervalo $[-5, 5]$.