1. Indica intervalos de longitud $0'1$ que contengan a cada una de las raíces del polinomio $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 3$ y calcula la mayor de ellas con un error inferior a $\frac{1}{2}10^{-3}$ por el método de la bisección.

2. Muestra que $x = a + b\cos x$ tiene al menos una raíz real, cualesquiera que sean los valores de a y b.

3. Indica intervalos de longitud $0'1$ que contengan a cada una de las raíces del polinomio $f(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$. Usa el método de la bisección para encontrar la menor raíz real y positiva de $f(x)$ con 3 cifras decimales correctas. (Los valores exactos de las raíces son $\cos((2j-1)\frac{\pi}{12})$, $\ j = 1, 2, \cdots, 6$.)

4. Dado $a > 0$ podemos calcular $\alpha = \sqrt[3]{a}$ por cualquiera de los dos procedimientos siguientes:
a. aplicando el método de Newton a $f(x) = x^3 - a$;
b. aplicando el método de Newton a $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$.
Determina cuál de los dos métodos converge más rápidamente. Calcula $\sqrt[3]{3}$ con cinco cifras decimales correctas.

5. Utiliza $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ para hallar el valor de $\cos(\pi/9)$ con cinco cifras decimales correctas por
a. el método de la bisección;
b. el método de Newton;
c. el método de la secante;
d. el método de la *regula falsi*.
Estudia empíricamente el orden de convergencia de cada uno de estos métodos.

6. **a.** Aisla las raíces de la ecuación $x = x^3 - x^2 - 1$.
b. Aproxima cada una de ellas por el método de Newton hasta conseguir cinco decimales correctos.
c. Utiliza el método de la secante para conseguir el mismo fin.

7. (**Método de Newton-Fourier**) Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable con continuidad en un intervalo que contenga a $[a, b]$, tal que $f(a) < 0, f(b) > 0$ y $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Comenzando con $x_0 = b$ define los iterados x_n según el método de Newton. A continuación, comenzando con $z_0 = a$, define los iterados

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

a. Da una interpretación geométrica de este procedimiento.
b. Muestra que $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[a, b]$, que los iterados x_n decrecen estrictamente hacia α y que los iterados z_n crecen estrictamente hacia α.
c. Encuentra la mayor raíz del polinomio $f(x) = x^5 - x - 1$ con un error inferior a $\frac{1}{2}10^{-5}$ usando el método de Newton-Fourier.

8. (**Programa**) Programa el método de la bisección para obtener la raíz positiva de la ecuación $-x + 35(1 - e^{-0{,}04x}) = 0$ con un error inferior a 10^{-8}. Diseña el programa de manera que pida el dato inicial y que produzca tres columnas que contengan x_n, $f(x_n)$ y la estimación del error.

9. (**Programa**) Diseña un programa que permita encontrar la raíz del polinomio $f(x) = x^6 - x - 1$ comprendida en el intervalo $[1, 2]$ utilizando el método de Newton, exhibiendo los valores de los iterados x_n y los de $f(x_n)$. Haz el programa de tal manera que calcule los iterados hasta que la diferencia entre dos de ellos, consecutivos, sea inferior a $\frac{1}{2}10^{-8}$. ¿Con cuántos decimales correctos puedes asegurar que has calculado la raíz del polinomio dado?

10. (**Programa**) Haz lo mismo que en el problema anterior usando el método de la secante.