Cálculo Numérico. Curso 2009-2010
Práctica 1

Temas 1 y 2: Introducción e Interpolación

1. Ejercicios

1. Comenzando con $x_0 = \pi, x_1 = \pi$ define $x_{n+2} = 11x_n - 10x_{n+1}, n = 0, 1, \cdots$. Haz un programa que produzca los 30 primeros términos de esta serie. ¿Observas alguna anomalía? ¿Puedes explicarla? Fíjate en x_2.

2. Diseña un programa que produzca las soluciones de una ecuación cuadratica $ax^2 + bx + c = 0$ cuando se le introducen los valores a, b y c. Comprueba tu programa para algunas ecuaciones de grado dos cuya solución conozcas de antemano. Utilizar por ejemplo $a = 1$, $b = 100000000$, $c = 1$.

3. En las dos cuestiones que siguen, construye el programa con un contador de tiempo a fin de apreciar la velocidad convergencia de uno y otro método.
a. Arquímedes fue el primero en calcular seriamente el número π inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares a la circunferencia (250 aC). Consideremos la circunferencia de diámetro 1 cuya longitud es pi. Para aproximarla sea p_n = perímetro del polígono inscrito de 2^n lados. Por ejemplo $p_2 = 2\sqrt{2}$. Se tiene

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (p_n/2^n)^2})}$$

Calcular p_n para $n = 3, 4, \ldots, 60$. Representar el error que se comete en función de n.
b. Utiliza la fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

para calcular el valor de π con diez cifras decimales correctas.
c. Usa la fórmula de Machin (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

para calcular el valor de π con diez cifras decimales correctas ($\pi = 3'14159265359$).

4. Diseña un programa para encontrar las 30 primeras sumas parciales del desarrollo de Taylor de e^{-8} alrededor del origen. El valor de e^{-8} con 10 cifras decimales correctas es $0'00033546263$, ¿se desvía tu resultado de este valor? Si es así busca un método para realizar el cálculo que evite esta desviación.

5. En el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales que modelan las vibraciones, el scattering y la transmisión del calor, entre otras, se utilizan las funciones de Bessel $J_n(x)$. La de orden cero, $J_0(x)$, se define como

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n} = 1 - \frac{\frac{1}{4}x^2}{(1!)^2} + \frac{(\frac{1}{4}x^2)^2}{(2!)^2} - \frac{(\frac{1}{4}x^2)^3}{(3!)^2} + \cdots$$

a. Calcula por medio de esta serie $J_0(1)$ y $J_0(20'652)$. Compara y comenta el resultado con los valores exactos que da Matlab con `besselj(0,x)`.
b. Genera con Matlab una tabla de valores para $J_0(x)$ para $0 \le x \le 30$ en incrementos de $0'1$. Utiliza esta tabla para hallar el valor de $J_0(20'652)$ por medio de (i) interpolación lineal; (ii) interpolación cuadrática.
¿Qué error se comete en cada caso? Para calcular la derivada en la fórmula del error puedes usar que $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, dt$.

6. Escribe una función de Matlab que reciba dos vectores de la misma longitud $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ y devuelva el vector de diferencias divididas necesarias para calcular el polinomio interpolador de los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Utilíza esta función para calcular distintos polinomios de interpolación $p_n(x)$ y comprobar gráficamente que,
a. Si $f(x) = e^x$ entonces $\forall x \in [0, 2]$; $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$;
b. Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $-5 \le x \le 5$ no hay convergencia.

2. Fecha de entrega y presentación de la práctica

La fecha de entrega será el mismo día del control: grupo 11A Martes 22 de febrero a las 12:30; grupo 11B Jueves 24 de febrero a las 12:30; grupo 16 miércoles 23 de febrero a las 17:30. Los archivos se colocarán en una carpeta llamada `practica1`. Se presentará, además, un guión (impreso) de la práctica, que incluya el código, los estudios teóricos, resultados y comentarios que se consideren oportunos.

3. Calificación

Examen individual en la fecha de entrega. Se podrá preguntar sobre los problemas y programación de esta práctica, junto con ejercicios de problemas o preguntas teóricas relacionados con ellos. De 0 a 20 puntos.