65. Sea

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Halla la factorización $B = QR$ y comenta las dos posibilidades hay para elegir las dimensiones de los factores Q y R.
b. Sea ahora $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$ y rango n. Para resolver el problema

$$\texttt{hallar } x \texttt{ tal que } \quad ||b - Bx||_2 \quad \texttt{es mínimo} \tag{1}$$

se puede usar la factorización QR de B para reducirlo a un sistema triangular. ¿Qué sistema?

66. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla una factorización $A = QR$.

67. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula sus factorizaciones QR. Utilizalas para resolver por mínimos cuadrados los sistemas sobredeterminados

$$A_1X = B; \qquad A_2X = B$$

donde B es el vector columna $(1, 2, 3, 4)^t$. Si X_1 y X_2 son las soluciones respectivas, calcula los residuos $R_i = A_iX_i - B_i$; $i = 1, 2$. Explica la diferencia en los resultados.

68.
a. Se conocen los valores de la función real f en los puntos $0, 1, \ldots, n$. Se pide ajustar a estos datos, por mínimos cuadrados, un polinomio de grado m, P_m. Escribe un programa de Matlab que calcule estos ajustes y dibuje, simultáneamente, las gráficas de f, de P_3 de P_5 y de P_10.
b. Aplica este programa al caso $n = 100$ con funciones $f_1(x) = e^{x/10}$ y $f_2(x) = 1/((x - 50)^2 + 4)$

Nota: las instrucciones Matlab `plot(x,y1)`; `hold on`; `plot(x,y2,'r')` producen las gráficas de los vectores `y1`; `y2` sobre los mismos ejes; la segunda gráfica se traza en color rojo.

69.
a. Sea $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz simétrica. Se sabe que sus autovalores son $\{-7, -3, 1, 5\}$. Si se usa el método de la potencia, ¿hacia qué valor debemos espaerar que converja? ¿por qué?
b. Supongamos que no conociésemos el autovalor 3 pero sí el resto y sabemos que el que falta está en el intervalo $(-3'5, -2)$. ¿Qué algoritmo podemos utilizar para aproximar el autovalor desconocido? ¿Qué velocidad de convergencia podemos esperar?
c. Sea $\tilde{B} \neq \mathbf{0}$ una aproximación de un vector $B \in \mathbb{R}^4$, $B \neq \mathbf{0}$, tal que

$$\frac{||B - \tilde{B}||_2}{||B||_2} \leq 0'1$$

¿qué se puede decir del error relativo $\frac{||X-\tilde{X}||_2}{||X||_2}$ donde $\tilde{X}$ es la solución del problema aproximado $D\tilde{X} = \tilde{B}$ y X es la solución del problema $DX = B$?.

70. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 18 \end{pmatrix};$$

a. aproxima, por el método de la potencia, su mayor autovalor;
b. aproxima, por el método de la potencia inversa, su autovalor menor;
c. aproxima el autovalor restante utilizando potencia inversa con desplazamiento.

Nota: en cada caso, una buena elección del vector de arranque puede simplificar el trabajo.

71. Sea $f(x) =$ **i.** $x \operatorname{sen} x$, **ii.** xe^{-x^2}, **iii.** $x \log(x+1)$, **iv.** $\frac{1}{1+x^2}$ $x \in [0,1]$.
a. Utiliza las reglas simples del punto medio, del trapecio y de Simpson para aproximar el valor de $\int_0^1 f(x)dx$.
b. Calcula la precisión que tendrá cada resultado según la correspondiente estimación teórica del error.
c. Calcula cada una de las integrales por medio de su primitiva y de los valores de ésta utilizando la calculadora; explica cualquier discrepancia significativa que observes.
d. Aplica las reglas corregidas a cada uno de los resultados obtenidos.
e. Calcula el valor de cada una de las integrales con una precisión de $5 \cdot 10^{-6}$ utilizando las reglas compuestas del punto medio, del trapecio y de Simpson.
f. Utiliza en el apartado anterior el método de extrapolación de Richardson en vez de la correspondiente regla corregida (para ello será necesario calcular el valor de la regla compuesta con la mitad del número de nodos). Compara los resultados obtenidos.

72.
a. Deduce la *regla de los tres octavos*: la integral $\int_a^b f(x)dx$ se aproxima por medio de la integral del polinomio de grado tres que interpola f con nodos en los puntos

$$x_i = a + ih; \qquad i = 0,1,2,3; \qquad h = \frac{b-a}{3}.$$

b. Deduce la *regla de Boole*: la integral $\int_a^b f(x)dx$ se aproxima por medio de la integral del polinomio de grado cuatro que interpola f con nodos en los puntos

$$x_i = a + ih; \qquad i = 0,1,2,3,4; \qquad h = \frac{b-a}{4}.$$

c. Utiliza las reglas de los *tres octavos* y de Boole para aproximar

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \tag{2}$$

y compara el resultado obtenido con el valor verdadero de esta integral.

73. Determina para qué polinomios son exactas las reglas del punto medio, del trapecio, y de Simpson. Conjetura para qué polinomios serán exactas las reglas de los tres octavos y de Boole.

74. (Matlab) Se quiere determinar la distancia geodésica entre Móstoles ($3^o50'W$ $40^o19'N$) y Santander ($3^o50'W$, $43^o27'$). Para ello se considera que el meridiano que pasa por ambas ciudades (que tienen la misma longitud) es una elipse cuyo semieje mayor (ecuatorial) mide $6378'14$ km y cuyo semieje menor (polar) mide $6356'75$ km. Expresa esta distancia por medio de una integral que calcule el arco de elipse y calcúlala con un error menor de 10 m.

75. Demuestra que si los puntos $x_0, \ldots, x_n$ son simétricos respecto del centro m de un intervalo I, es decir $x_k + x_{n-k} = 2m$, y si n es par entonces el método $\int_I f \approx \int_I P_f^{x_0,\ldots,x_n}$ es exacto para polinomios de grado $\leq n+1$.

76. Se quiere construir una tabla para la distribución normal

$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

para $x > 0$, que produzca por interpolación lineal un error menor que $5 \cdot 10^{-6}$.
a. Determina cuál debe ser el paso de la tabla y el número de cifras que deben calcularse en cada integral.
b. Calcula $N(1), N(2), N(3)$, y $N(4)$.

77. Calcula los nodos y los pesos de las cuadraturas de Gauss I_6 e I_7 (tendrás que utilizar un método de aproximación de ceros de polinomios).

78. Utiliza las cuadraturas de Gauss I_4 e I_5 para calcular el valor aproximado de (2).

79. El teorema de los números primos establece que el número de primos en el intervalo $a < x < b$ es aproximadamente igual a

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x}.$$

Utiliza esta fórmula con $a = 100$ y $b = 200$ y compara el resultado con el número exacto de primos en $(100, 200)$.

80. (Matlab) Usa las fórmulas de integración gaussiana con número de nodos desde 1 hasta 7 para escribir un programa que calcule

$$I = \int_1^3 5xe^{-x} \ln x \, dx$$

Observa la velocidad de convergencia de este tipo de integración.

Cálculo Numérico; hoja 4, 2009/10.