52. Resuelve por el método de eliminación de Gauss el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Escribe la descomposición $A = LU$.

53. Dado el sistema

$$\begin{cases} 6x+ & 2y+ & 2z = & -2 \\ 2x+ & (2/3)y+ & (1/3)z = & 1 \\ x+ & 2y- & z = & 0 \end{cases}$$

a. comprueba que su solución es $x = 2'6$, $y = -3'8$, $z = -5'0$;
b. trabajando con mantisa de cuatro dígitos resuelve por Gauss *sin* utilizar pivote parcial;
c. trabajando de nuevo con mantisa cuatro dígitos resuelve por Gauss utilizando pivote parcial.

54. El cálculo de los elementos de un *spline* cúbico natural con seis nodos igualmente separados plantea un sistema tridiagonal de la forma

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

a. Resuelve el sistema por el método de eliminación de Gauss.
b. Escribe explícitamente la descomposición LU.
c. Obtener fórmulas para la descomposición LU de la matriz que aparece cuando el número de nodos es n.

55. a. Calcula el número de condición de la matriz de Hilbert 3×3

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}. \qquad \text{Sea} \qquad b = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

b. Resuelve el sistema $H_3X = b$ trabajando con mantisa de cuatro dígitos. Compara el resultado obtenido con el resultado correcto.
c. Demuestra que la solución de $H_3X = b$ da los coeficientes del polinomio de segundo grado que mejor aproxima cuadráticamente a la función $f(x) = 5x^3$, $x \in [0, 1]$. (Nota: el polinomio $p(x)$ de grado 2 que mejor aproxima cuadráticamente a una función f en el intervalo $[0, 1]$ es el que minimiza la integral $\int_0^1 |f(x) - p(x)|^2 dx$ cuando p varía sobre todos los polinomios de grado menor o igual que 2.)

56. a. Escribe la matriz A de orden n dada por $a_{ij} = 2$ si $i = j$, $a_{ij} = 1$ si $i = j - 1$ ó $i = j + 1$ y $a_{ij} = 0$ en el resto de los casos.
b. Demuestra que A tiene determinante no nulo probando que el sistema lineal $AX = 0$ tiene solución única. (Sugerencia: demuestra que si $\alpha = \text{máx}_{1 \le i \le n} |x_i|$, donde $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ es solución del sistema, entonces $\alpha = 0$.)

57. Se consideran las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Decidir, sin intentar calcularla, si la matriz A_1 admite una descomposición $A = LU$ (sin pivotaje) y, en caso afirmativo, encontrarla.
b. Encontrar una descomposición con pivotaje (parcial) $PA = LU$ para la matriz A_2.
c. Encontrar la descomposición de Cholesky $A = CC^T$ de la matriz A_3.
d. Justificar, sin calcularla, que la matriz A_4 admite una descomposición $A = LDL^T$, con L triangular inferior con *unos* en la diagonal y D diagonal, y luego encontrarla.

58. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

a. Dar condiciones sobre los coeficientes de A para que exista la factorización LU y, en ese caso, calcularla.
b. Dar condiciones sobre los coeficientes de A para que exista la factorización de Cholesky y, en ese caso, encontrarla.

59. Demostrar lo siguiente:
a. Una matriz triangular es invertible si y sólo si los elementos en su diagonal son todos distintos de 0.
b. Si A y B son triangulares inferiores entonces también lo es AB.
c. Si A es triangular inferior e invertible entonces también lo es $A - 1$.
Observación: los dos apartados anteriores demuestran que el conjunto $\{A : A$ `es triangular inferior e invertible`$\}$ es un grupo (no conmutativo, salvo en dimensión 2) para la multiplicación de matrices.
d. Lo anterior también es cierto para:

- matrices triangulares inferiores con *unos* en la diagonal;
- matrices triangulares superiores;
- matrices triangulares superiores con *unos* en la diagonal.

Observación: suponiendo que ya lo hemos demostrado para las inferiores, hay una «forma rápida» de probarlo para las superiores [¿cuál?].
e. Probar que si la descomposición LU de una matriz existe entonces es única.

60. Demostrar las siguientes desigualdades entre normas y dar un ejemplo de vector o matriz (no nulos) para los cuales se alcance la igualdad:
a. $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{m}||x||_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.
b. $||A||_\infty \leq \sqrt{n}||A||_2$ y $||A||_2\sqrt{m}||A||_\infty$ para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

61. Calcular explícitamente la factorización de Cholesky de la siguiente matriz tridiagonal de tamaño $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 13 & 9 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 25 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (n-1)^2 \\ 0 & \dots & \dots & & (n-1)^2 & (n-1)^2+n^2 \end{pmatrix}$$

62. Hallar las matrices de Jacobi y de Gauss–Seidel para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar los autovalores de las matrices anteriores y determinar si los métodos iterativos correspondientes son o no convergentes.

63. Se considera el sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no singular. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando la matriz A es:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Estudiar también, cuando ambos métodos converjan, cuál lo hace más rápido.

64. Sea

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a. Escribe las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema $Cx = y$.
b. Demuestra que el método de Jacobi converge si y solo si el método de Gauss–Sidel converge.
c. ¿Se puede establecer alguna relación entre sus velocidades de convergencia?