28. Halla los polinomios interpoladores de segundo y tercer grado con nodos respectivamente en los puntos $0, 1, -1$ y $-2, -1, 1, 2$ de las funciones: **a.** $f(x) = x$, **b.** $f(x) = x^2$, **c.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, **d.** $f(x) = 1/(2x+1)$. Compara los polinomios obtenidos con las funciones correspondientes. ¿Cuál es el polinomio interpolador de grado $n + k$ de un polinomio de grado n.

29. Halla el polinomio interpolador de tercer grado de la función $\operatorname{sen} x$ con nodos en los puntos $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. Halla el polinomio interpolador de cuarto grado con nodos en los puntos $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. En ambos casos da una cota superior del error.

30. A partir de la siguiente tabla de logaritmos decimales

x	$1'0$	$1'5$	$2'0$	$3'0$	$3'5$
$\log x$	$0'00000$	$0'17609$	$0'30103$	$0'47712$	$0'54407$

forma una tabla de diferencias divididas y utilízala para estimar $\log 1'25$ y $\log 2'5$ por interpolación cúbica. Estima el error de estas aproximaciones. Compara la diferencia de los valores calculados con el valor de $\log 2$.

31. (MATLAB) Escribe un programa que calcule las diferencias divididas para la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

con nodos igualmente espaciados en el intervalo $[-5, 5]$.

32. Se quiere construir una tabla de logaritmos decimales para los valores de x entre 1 y 10, de forma que interpolando linealmente sus valores se obtengan cuatro cifras decimales correctas. Determina cuál debe ser el paso de la tabla y cuantas cifras decimales correctas deben tener los valores de la tabla.

33. Se conocen los siguientes datos de una función $f(x)$:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0'4	1'554284	0'243031
0'5	1'561136	-0'089618

Estima el valor de f para $x = 0'473$.

34. Considera el polinomio $\Psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ para nodos igualmente espaciados entre sí una distancia h. Demuestra que

$$|\Psi(x)| \le n!h^{(n+1)}, \qquad x_0 \le x \le x_n.$$

Si $P_n(x)$ es el polinomio de interpolación de la función $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$, usa el resultado anterior para demostrar que

$$\max_{0\le x\le 1} |e^x - P_n(x)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

35. De una función $f(x)$, de clase C^3, se conocen las siguientes cotas:

$$1 \le f'(x) \le 3, \qquad |f''(x)| \le 1, \qquad |f^{(3)}(x)| \le 1, \qquad |f^{(4)}(x)| \le 1,$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. Tenemos, además, la siguiente tabla de valores exactos:

x	$0'4$	$0'5$	$0'6$	$0'7$
$f(x)$	$1'1894183$	$1'4794255$	$1'7646425$	$2'0442177$

Determina la solución α a la ecuación $f(x) = 1'5$ con un error menor que $0'001$. (Interpola la inversa $f^{-1}(y)$).

36. Cuando los nodos x_i están igualmente espaciados, las fórmulas para las diferencias divididas y para los polinomios de interpolación se simplifican. Define

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x), \qquad \Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \qquad \Delta_h^2 f(x) = \Delta_h^1 f(x+h) - \Delta_h^1 f(x).$$

Demuestra que si $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_1 + h$,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2!h^2}\Delta_h^2 f(x_0).$$

Usa este resultado para demostrar que

$$p_2(x) = \sum_{j=0}^{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} \Delta_h^j f(x_0), \qquad \alpha = \frac{x - x_0}{h}.$$

37. Un móvil se lanza verticalmente hacia arriba en el instante $t = 0$ y su altura tras un tiempo t viene dada por la ecuación $y(t) = -245t + 8575(1 - e^{-t/25})$. Halla el valor de $t > 0$ para el que el móvil vuelve a tocar el suelo.

38. Consideramos el polinomio $x^4 - 14x^3 + 6x^2 + 80x + 2600$. ¿Cuántas raíces tiene? Si cambiamos el coeficiente de x^4 de 1 a $0'95$ ¿Cómo cambia su raíz mayor?

39. (Matlab)Halla intervalos de longitud $0'1$ que contengan a cada una de las raíces del polinomio $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 3$ y calcula la mayor de ellas con un error inferior a $\frac{1}{2}10^{-3}$ por el método de la bisección.

40. Muestra que $x = a + b\cos x$ tiene al menos una raíz real, cualesquiera que sean los valores de a y b.

41. (Matlab) Halla intervalos de longitud $0'1$ que contengan a cada una de las raíces del polinomio $f(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$. Usa el método de la bisección para encontrar la menor raíz real y positiva de $f(x)$ con 3 cifras decimales correctas. (Los valores exactos de las raíces son $\cos((2j-1)\frac{\pi}{12})$, $j = 1, 2, \cdots, 6$.)

42. Dado $a > 0$ podemos calcular $\alpha = \sqrt[3]{a}$ por cualquiera de los dos procedimientos siguientes:
a. aplicando el método de Newton a $f(x) = x^3 - a$;
b. aplicando el método de Newton a $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$.
Determina cuál de los dos métodos converge más rápidamente. Calcula $\sqrt[3]{3}$ con cinco cifras decimales correctas.

43. (Matlab) Utiliza la ecuación $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$ para hallar el valor de $\cos(\pi/9)$ con cinco cifras decimales correctas por
a. el método de la bisección; **b.** el método de Newton;
c. el método de la secante; **d.** el método de la *regula falsi.*
Estudia empíricamente el orden de convergencia de cada uno de estos métodos.

44. La ecuación $x + e^{-x^2}\cos x = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $(-1, 0)$. Utiliza los métodos de Newton y de la secante para obtener esta raíz con cuatro cifras decimales correctas. (Observa que utilizar el método sin una calculadora nos lleva a evaluar funciones trigonométricas y exponenciales con cierta precisión.)

45. a. Aisla las raíces de la ecuación $x = x^3 - x^2 - 1$.
b. (Matlab) Aproxima cada una de ellas por el método de Newton hasta conseguir cinco decimales correctos.
c. (Matlab) Utiliza el método de la secante para conseguir el mismo fin.

46. (Matlab) Programa el método de la bisección para obtener la raíz positiva de la ecuación $-x+35(1-e^{-0'04x}) = 0$ con un error inferior a 10^{-8}. Diseña el programa de manera que pida el dato inicial y que produzca tres columnas que contengan x_n, $f(x_n)$ y la estimación del error.

47. (Matlab) Diseña un programa que permita encontrar la raíz del polinomio $f(x) = x^6 - x - 1$ comprendida en el intervalo $[1, 2]$ utilizando el método de Newton, exhibiendo los valores de los iterados x_n y los de $f(x_n)$. Haz el programa de tal manera que calcule los iterados hasta que la diferencia entre dos de ellos, consecutivos, sea inferior a $\frac{1}{2}10^{-8}$. ¿Con cuántos decimales correctos puedes asegurar que has calculado la raíz del polinomio dado?

48. (Matlab) Haz lo mismo que en el problema anterior usando el método de la secante.

49. Dada la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ se quiere aproximar su raíz $x = 2$ partiendo de un valor próximo x_0 por algún método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$.
a. Estudia la convergencia del método $F(x) = x^2 - 2$ obtenido a partir de $x = x^2 - 2$.
b. Estudia la convergencia del método $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ obtenido a partir de $x^2 = x + 2$.
c. Halla una constante k tal que el método $x_{n+1} = x_n + k(x_n^2 - x_n - 2)$ sea convergente cerca de $x = 2$. Determina sobre qué intervalo el método es convergente para la constante k obtenida.

50. Prueba que la ecuación $e^x - 100x^2 = 0$ tiene exactamente tres soluciones reales y halla intervalos de longitud $0'1$ que las contengan. Observa que cada una de las ecuaciones

$$x = \frac{e^{x/2}}{10}, \qquad x = 2(\log x + \log 10), \qquad x = -\frac{e^{x/2}}{10},$$

es equivalente a la dada (al menos en un intervalo de la recta) y verifica que cada una de ellas define un método iterativo convergente para al menos una de las soluciones de la ecuación. Indica a que raíz converge cada método. Aproxima con error menor que 10^{-3} la mayor de las raíces utilizando el método correspondiente.

51. Se consideran sucesiones definidas por las siguientes fórmulas iterativas:

$$\textbf{a}.\ x_{n+1} = -16 + 6x_n + \frac{12}{x_n} \qquad \textbf{b}.\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^2} \qquad \textbf{c}.\ x_{n+1} = \frac{12}{1 + x_n}$$

Determina sobre qué intervalos de la recta convergen y cuál será el límite.