1. Convierte los siguientes números decimales a binarios: **a**. 161; **b**. $3'13$; **c**. $\frac{1}{6}$; **d**. $\frac{1}{7}$.

2. Halla las expresiones binarias de las expresiones decimales: $0'11$, $0'4$, $0.\overline{3}$, $0'7$.

3. Considera una representación en coma flotante en binario (base 2) con mantisa de tres dígitos.
a. Encontrar la representación de $fl(\frac{1}{10})$. **b.** Realizar la operación $fl(fl(\frac{1}{10}) + fl(\frac{9}{10}))$.

4. Halla el número racional correspondiente a la fracción binaria infinita $x = 0'011011\overline{011}_{(2}$.

5. Convierte a decimal y a binario los siguientes números hexadecimales: **a.** 1F$'$A; **b.** DD...D (n veces D); **c.** 0$'$BBBB...; **d.** A$'$BCDEF.

6. Convierte los siguientes números decimales a hexadecimales: **a**. 130; **b**. $0'2$; **c**. $3'9$; **d**. $6'\overline{6}$.

7. Escribe primero en base 3 y luego en base 5 los números: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{16}$.

8. Pasa $0'3\overline{8}_{(10}$ a base 2, a base 8 y a base 16.

9. Halla las fracciones representadas por: $0'12\overline{02}_{(3}$ y $0'\overline{11011}_{(2}$.

10. Acota superiormente el error absoluto y el error relativo y encuentra el número de decimales correctos y el número de cifras significativas correctas en las siguientes aproximaciones de x por $\tilde{x}$:
a. $x = 28'245$, $\tilde{x} = 28'271$ **b**. $x = e$, $\tilde{x} = \frac{19}{7}$ **c**. $x = \sqrt{2}$, $\tilde{x} = 1'414$ **d**. $x = \pi$, $\tilde{x} = \frac{22}{7}$.

11. (MATLAB) Suma manualmente los 20 primeros términos de las series

$$\textbf{a}.\ \sum_{n=1} \frac{1}{n}; \qquad \textbf{b}.\ \sum_{n=1} \frac{1}{n^2}; \qquad \textbf{c}.\ \sum_{n=1} \frac{1}{n^4}; \qquad \textbf{d}.\ \sum_{n=0} \frac{1}{2^n}.$$

primero de menor a mayor y después de mayor a menor, utilizando mantisa de 3 cifras en cada paso.

12. Se sabe que 10 000 aproxima a x con |error absoluto| $< \varepsilon$. Demuestra que $\frac{1}{10000}$ aproxima a $\frac{1}{x}$ con

$$|\text{error absoluto}| < \frac{\varepsilon}{(10000 - \varepsilon)^2}.$$

En el caso de $\epsilon = 1$ decir con cuántos decimales correctos aproxima $\frac{1}{10000}$ a $\frac{1}{x}$.

13. Demuestra que si el número conocido $\tilde{x}$ aproxima al desconocido x con $|x - \tilde{x}| < \varepsilon$, entonces $\frac{1}{\tilde{x}}$ aproxima a $\frac{1}{x}$ con

$$|\text{error relativo}| < \frac{\varepsilon}{|\tilde{x}|}.$$

Observa que si x y $\tilde{x}$ son como en el apartado anterior y f es una función derivable entonces el error en $f(\tilde{x})$ se puede estimar por $f'(\tilde{x})\varepsilon$.

14. Calcula los polinomios de Taylor de grado 3 en los casos siguientes y representa gráficamente (usa un programa de representación gráfica de funciones; MatLab, por ejemplo) tanto la función dada como los polinomios de Taylor calculados: **a.** $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ **b.** $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{\pi}{4}$ **c.** $f(x) = e^{\cos x}$, $a = 0$ **d.** $f(x) = \log(1 + \cos x)$, $a = 0$

15. Halla los polinomios de Taylor de grado n en torno al origen de las funciones siguientes:

$$\textbf{a}.\ \frac{1}{1+x^2} \qquad \textbf{b}.\ \arctan x \qquad \textbf{c}.\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad \textbf{d}.\ \log\frac{1+x}{1-x}$$

Escribe para cada una de ellas una fórmula para el resto.

16. Sea $p_{2n-1}(x)$ el polinomio de Taylor de grado $2n - 1$ de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el punto $x = 0$. ¿Cómo debes elegir n para que

$$|\operatorname{sen}(x) - p_{2n-1}(x)| \leq 0'001$$

para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$? Comprueba tu contestación evaluando $p_{2n-1}(\frac{\pi}{2})$.

17. (MATLAB) Resuelve la ecuación $x^2 - 26x + 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática. Utiliza aritmética con mantisa de 5 dígitos en base 10 para encontrar valores numéricos de las raíces de esta ecuación (por ejemplo, necesitarás $\sqrt{168} \approx 12'961$). ¿Se produce alguna pérdida de significación del error?
Halla las raíces de la ecuación anterior con mayor precisión usando solamente aritmética con mantisa de 5 dígitos. (Sugerencia: $13 - \sqrt{168} = \frac{1}{13+\sqrt{168}}$).

18. Calcula $I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx$ con una precisión de 10^{-6}, reemplazando e^x por una aproximación con su polinomio de Taylor en $x = 0$ más su resto.

19. Sea
$$g(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{t}\, dt.$$
a. Escribe el polinomio de Taylor de $g(x)$ en $x = 0$.
b. Acota superiormente el error que se produce al aproximar g por su polinomio de Taylor de grado n cuando $|x| \le \frac{1}{2}$.
c. Encuentra n para que el polinomio de Taylor de grado n que aproxima a g tenga un error inferior a 10^{-7} en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

20. (Matlab) Comenzando con $x_0 = \pi, x_1 = \pi$ define $x_{n+2} = 11x_n - 10x_{n+1}, n = 0, 1, \cdots$. Haz un programa que produzca los 30 primeros términos de esta serie. ¿Observas alguna anomalía? ¿Puedes explicarla? Fíjate en x_2.

21. (Matlab) Diseña un programa que produzca las soluciones de una ecuación cuadrada $ax^2 + bx + c = 0$ cuando se le introducen los valores a, b y c. Comprueba tu programa para algunas ecuaciones de grado dos cuya solución conozcas de antemano.

22. Usa los polinomios de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ y de $\cos(x)$ en $x = 0$ para mostrar que $3\operatorname{sen}(x) - x\cos(x) \approx 2x$; y que por tanto,
$$x \approx \frac{3\operatorname{sen}(x)}{2 + \cos(x)}\ .$$
Encuentra el error que se comete en la aproximación y úsala para encontrar el valor de π con cuatro decimales correctos.

23. (Matlab) En las dos cuetiones que siguen, construye el programa con un contador de tiempo a fin de apreciar la velocidad convergencia de uno y otro método.
a. Usa la fórmula de Machin (1706)
$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$
para calcular el valor de π con diez cifras decimales correctas ($\pi = 3'14159265359$).
b. Utiliza la fórmula de Leibniz
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$
para calcular el valor de π con diez cifras decimales correctas.

24. Dado un triángulo ABC suponemos que α es el ángulo que forman los lados b, c (opuestos a los vértices B, C respectivamente). Si b, c se miden exactamente pero α tiene un error $\Delta\alpha$, $|\Delta\alpha| < \delta$, ¿con qué error obtenemos el valor del tercer lado a? ($a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$).

25. Para calcular la exponencial podemos utilizar una cualquiera de las dos fórmulas siguientes:
$$(1) \qquad e^x = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\right),$$
$$(2) \qquad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$
Suponiendo x positivo se tienen las acotaciones (que no es necesario que pruebes):
$$\frac{x^2}{2n} < e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \frac{x^2 e^x}{2n}.$$
Se desea hallar $e^{1/10}$ con un error absoluto menor que $\frac{1}{2}10^{-8}$. ¿Cuánto ha de valer m en (1)? ¿Cuánto ha de valer n en (2)? ¿Qué fórmula es mejor para evaluar la exponencial?

26. Halla la serie de Taylor de $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x = 0$ y halla dos cotas para el resto de Taylor, una usando el resto de Lagrange y otra acotando el resto de la serie, cuando $|x| < 1$.

27. (Matlab) Diseña un programa para encontrar las 30 primeras sumas parciales del desarrollo de Taylor de e^{-8} alrededor del origen. El valor de e^{-8} con 10 cifras decimales correctas es $0'00033546263$, ¿se desvía tu resultado de este valor? Si es así busca un método para realizar el cálculo que evite esta desviación.