

1. Convierte los siguientes números decimales a binarios: **a.** 267 **b.** 3'125 **c.** $\frac{1}{6}$ **d.** $\frac{1}{7}$
2. Halla las expresiones binarias de las expresiones decimales 0'4, y 0'8.
3. Halla el número racional correspondiente a la fracción binaria infinita $x = 0'011011\overline{011}_2$
4. Convierte a decimal y a binario los siguientes números hexadecimales: **a.** 1F'A, **b.** DD...D (n veces D), **c.** 0'BBBB...
5. Convierte los siguientes números decimales a hexadecimales: **a.** 130 **b.** 0'2 **c.** 3'9
6. Escribe en base 3: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{16}$.
7. Pasa $0'3\overline{8}_{10}$ a base 2.
8. Halla las fracciones representadas por: $0'12\overline{02}_3$ y $0'\overline{11011}_2$.
9. Acota superiormente el error absoluto y el error relativo y encuentra el número de decimales correctos y el número de cifras significativas correctas en las siguientes aproximaciones de x por \tilde{x} :
a. $x = 28'245$, $\tilde{x} = 28'271$ **b.** $x = e$, $\tilde{x} = \frac{19}{7}$ **c.** $x = \sqrt{2}$, $\tilde{x} = 1'414$

10. Suma manualmente los 20 primeros términos de las series

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{c. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

primero de menor a mayor y después de mayor a menor, utilizando mantisa de 3 cifras en cada paso.

11. Se sabe que 10000 aproxima a x con $|\text{error absoluto}| < \epsilon$. Demuestra que $\frac{1}{10000}$ aproxima a $\frac{1}{x}$ con

$$|\text{error absoluto}| < \frac{\epsilon}{(10000 - \epsilon)^2}.$$

En el caso de $\epsilon = 1$ decir con cuántos decimales correctos aproxima $\frac{1}{10000}$ a $\frac{1}{x}$.

12. Demuestra que si el número conocido \tilde{x} aproxima al desconocido x con $|x - \tilde{x}| < \epsilon$, entonces $\frac{1}{\tilde{x}}$ aproxima a $\frac{1}{x}$ con

$$|\text{error relativo}| < \frac{\epsilon}{|\tilde{x}|}.$$

Observa que si x y \tilde{x} son como en el apartado anterior y f es una función derivable entonces el error en $f(\tilde{x})$ se puede estimar por $f'(\tilde{x})\epsilon$.

13. Calcula los polinomios de Taylor de grado 3 en los casos siguientes y representa gráficamente (usa un programa de representación gráfica de funciones; MatLab, por ejemplo) tanto la función dada como los polinomios de Taylor calculados: **a.** $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ **b.** $f(x) = \text{sen}(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$ **c.** $f(x) = e^{\cos(x)}$, $a = 0$ **d.** $f(x) = \log(1 + \cos(x))$, $a = 0$

14. Halla los polinomios de Taylor de grado n en torno al origen de las funciones siguientes:

$$\text{a. } \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{b. } \arctan x \qquad \text{c. } \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \text{d. } \log \frac{1+x}{1-x}$$

Escribe para cada una de ellas una fórmula para el resto.

15. Sea $p_{2n-1}(x)$ el polinomio de Taylor de grado $2n - 1$ de $f(x) = \text{sen}(x)$ en el punto $x = 0$. ¿Cómo debes elegir n para que

$$|\text{sen}(x) - p_{2n-1}(x)| \leq 0'001$$

para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$? Comprueba tu contestación evaluando $p_{2n-1}(\frac{\pi}{2})$.

16. Resuelve la ecuación $x^2 - 26x + 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática. Utiliza aritmética con mantisa de 5 dígitos en base 10 para encontrar valores numéricos de las raíces de esta ecuación (por ejemplo, necesitarás $\sqrt{168} \approx 12'961$). ¿Se produce alguna pérdida de significación del error? Halla las raíces de la ecuación anterior con mayor precisión usando solamente aritmética con mantisa de 5 dígitos. (Sugerencia: $13 - \sqrt{168} = \frac{1}{13 + \sqrt{168}}$).

17. Calcula $I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ con una precisión de 10^{-6} , reemplazando e^x por una aproximación con su polinomio de Taylor en $x = 0$ más su resto.

18. Sea

$$g(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt.$$

a. Escribe el polinomio de Taylor de $g(x)$ en $x = 0$.

b. Acota superiormente el error que se produce al aproximar g por su polinomio de Taylor de grado n cuando $|x| \leq \frac{1}{2}$.

c. Encuentra n para que el polinomio de Taylor de grado n que aproxima a g tenga un error inferior a 10^{-7} en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

19. (**Programa**) Comenzando con $x_0 = \pi, x_1 = \pi$ define $x_{n+2} = 4x_n - 3x_{n+1}, n = 0, 1, \dots$. Haz un programa que produzca los 30 primeros términos de esta serie. ¿Observas alguna anomalía?

20. Usa los polinomios de Taylor de $\sin(x)$ y de $\cos(x)$ en $x = 0$ para mostrar que $3\sin(x) - x\cos(x) \approx 2x$; y que por tanto,

$$x \approx \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

Encuentra el error que se comete en la aproximación y úsala para encontrar el valor de π con cuatro decimales correctos.

21. Usa la fórmula de Machin (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

para calcular el valor de π con diez cifras decimales correctas. (El valor de π con diez decimales correctos es: 3'14159265359.)

22. En una importante tableta cuneiforme, la YBC7289, aparece $\sqrt{2}$, en notación sexagesimal, como $\sqrt{2} = 1; 24, 51, 10$, donde el *punto y coma* separa la parte entera de la fraccionaria y las cantidades que aparecen separadas por *comas* son los sucesivos restos modulo 60 (sexagesimal). Comprueba hasta que punto el resultado es correcto.

Usa la serie del binomio

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{donde} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

para calcular $\sqrt{2}$ con cuatro decimales correctos.

Compara y comenta los dos resultados anteriores.

23. Dado un triángulo ABC suponemos que α es el ángulo que forman los lados b, c (opuestos a los vértices B, C respectivamente). Si b, c se miden exactamente pero α tiene un error $\Delta\alpha$, $|\Delta\alpha| < \delta$, ¿con qué error obtenemos el valor del tercer lado a ? ($a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$).

24. Para calcular la exponencial tenemos las siguientes fórmulas:

$$(1) \quad e^x = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} \right),$$

$$(2) \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

Suponiendo x positivo se tienen las acotaciones (que no es necesario que pruebes):

$$\frac{x^2}{2n} < e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n < \frac{x^2 e^x}{2n}.$$

Se desea hallar $e^{1/10}$ con un error absoluto menor que $\frac{1}{2}10^{-8}$. ¿Cuánto ha de valer m en (1)? ¿Cuánto ha de valer n en (2)? ¿Qué fórmula es mejor para evaluar la exponencial?

25. Halla la serie de Taylor de $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x = 0$ y halla dos cotas para el resto de Taylor, una usando el resto de Lagrange y otra acotando el resto de la serie, cuando $|x| < 1$.

26. (**Programa**) Diseña un programa para encontrar las 30 primeras sumas parciales del desarrollo de Taylor de e^{-8} alrededor del origen. (El valor de e^{-8} con 10 cifras decimales correctas es 0'00033546263. ¿Podrías mejorar los cálculos hechos anteriormente?)