1. Lanzamos sobre una mesa tres dados, uno rojo, otro azul, y otro amarillo. Halla la probabilidad de que, al tirar tres dados, obtengamos

a. en al menos uno de ellos un *cinco*;

Solución: $1 - \frac{5}{6}^3 = 1/216$.

b. ningún *cinco*;

Solución: $\frac{5}{6}^3 = 125/216$.

c. exactamente dos *cincos*;

Solución: $3\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{15}{216}$.

d. a la vez solamente un *cinco* y un número par;

Solución: $6\frac{1}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.

e. par en el rojo y un *cinco* en el amarillo.

Solución: $\frac{3}{6}\frac{1}{6} = \frac{3}{12}$.

2. (Ejercicio de combinatoria) Supongamos que el conjunto de signos más frecuente en las quinielas con catorce aciertos es de 8 *unos*, 6 *equis*, y 0 *doses*. ¿Cuántas combinaciones son posibles con estos signos?

Solución: $\binom{14}{8} = \binom{14}{6} = 3003$.

3. Tenemos un dado cargado de tal forma que la probabilidad de obtener cada una de las caras es proporcional al número de puntos que aparecen en ella. Halla la constante de proporcionalidad.

Solución: $1/21$.

¿Cuál será la probabilidad de obtener con este dado dos *ases* en dos tiradas?

Solución: $1/141$.

4. Un equipo de fútbol tiene decidido que si durante el transcurso de un partido les pitaran uno o más penalties a favor el primero de ellos lo tiraría el jugador A, que marca 4 de cada cinco penalties tirados, el segundo lo tiraría el jugador B, que marca 4 de cada 7, y un posible tercero lo lanzaría C, que consigue marcar 2 de cada 5. Si en un determinado partido nuestro equipo dispone de tres penalties a favor, hallar las probabilidades de marcar 3, 2, 1, y 0 de estos penalties.

Solución: $0'183$, $0'457$, $0'309$, $0'051$.

5. (Ejercicio de combinatoria)

a. Un entrenador de baloncesto tiene en su banquillo doce jugadores. ¿Cuántos equipos distintos (cinco jugadores) puede formar?

Solución: $\binom{12}{5} = 792$.

b. Un entrenador de fútbol dispone en su plantilla de dos porteros y veinte jugadores de campo. ¿De cuántas formas distintas puede elegir la alineación (un portero y diez jugadores de campo)?

Solución: $2 \cdot \binom{20}{10} = 369\,512$.

6. Tenemos dos dados, uno de seis caras, marcadas del 1 al 6, y otro de 8 caras (como los que se usan en algunos juegos de *rol*) marcadas del 1 al 8, ambos bien equilibrados; lanzamos a la vez y consideramos las variables aleatorias $X =$ *resultado obtenido en el primer dado*, $Y =$ *resultado obtenido en el segundo dado*, $S = X + Y$, $D = X - Y$. Describe los espacios muestrales y las distribuciones de las cuatro variables aleatorias.

En particular, halla la probabilidad de que

a. $S = 10$;

Solución: $5/(6 \cdot 8)$.

b. la suma de los valores obtenidos sea par;

Solución: $(2 \cdot 12)/(6 \cdot 8)$.

c. la diferencia entre los dos valores obtenidos sea mayor o igual que tres.

Solución: Diferencia en valor absoluto 21/48.

7. Un jugador de baloncesto marca el 75% de sus tiros libres. Si en cuatro partidos consecutivos tiene que tirar exactamente 20 tiros libres en cada uno, halla la probabilidad de que en todos ellos consiga 16 o más puntos.

Solución: Una Binomial $B(20, 0'75)$ da la probabilidad de «éxito» en un partido; luego calculamos la probabilidad de obtener cuatro «éxitos» consecutivos, $0'03$.

8. (Para quien sepa como se puntúa en tenis. Difícil.)

Dos jugadores de tenis, A y B, tienen probabilidades p y $1 - p$ de ganar un punto, si sirve A.

a. Halla la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve y que en este momento está en situación de *deuce*.

Solución: $\frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$.

b. Halla la probabilidad de que A gane el nuevo juego que comienza ahora, en el que también sirve.

9. (Para jugadores de mus.)

a. ¿Cuál es la probabilidad de tener un juego de *cuarenta* de mano?

Solución: $0'02$.

b. ¿Cuál es la probabilidad de recibir *treintaiuna* de mano.

Solución: $0'092$.

c. Si soy mano y tengo *perete* de mano, ¿Qué probabilidad tengo (antes de que nadie hable) de tener *cuarenta* en el segundo reparto? ¿Y *duples*?

10. a. ¿Cuál es la probabilidad de que en una reunión de 10 personas elegidas al azar al menos dos tengan la misma fecha de cumpleaños?

Solución: $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot 356}{365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365}$.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que en esta clase, que tiene 100 estudiantes, al menos dos tengan la misma fecha de cumpleaños? (El cálculo de esta probabilidad con la calculadora es largo. Idea un método para abreviarlo utilizando logaritmos.)

Solución: $p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot 266}{365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365}$;

$\log(1-p) = \sum_{k=266}^{365} \log k - 100 \log 365$

$\approx 100(\frac{\log 365 - \log 266}{2} - \log 365)$.

c. ¿Cuál es el menor número de personas necesarias en una reunión para que la probabilidad pedida en los dos párrafos anteriores sea al menos 0.5?

11. Una caja de reclutas tiene 15 individuos y queremos hacer un sorteo para elegir a uno de ellos. Con este fin le asignamos a cada uno un número, desde el 00 hasta el 14 y utilizamos un bombo que tiene 10 bolas, cada una con un dígito distinto. Hacemos dos extracciones con reemplazamiento; la primera para el dígito de las decenas, la segunda para el de las unidades. Si en cualquiera de las dos extracciones obtenemos una bola que nos llevaría con seguridad a un número no asignado repetimos esa extracción. ¿Te parece que el sorteo es equitativo? Determina la probabilidad de ser elegido que tiene cada recluta según su número.

Solución: El sorteo no es equitativo, los reclutas con número del 00 al 09 tienen probabilidad $\frac{1}{20}$ de ser elegidos mientras que los que tienen número del 10 al 14 tienen probabilidad $\frac{1}{10}$.

12. Cierto test para determinar el factor Rh tiene probabilidad 0'95 de dar el resultado correcto cuando se aplica sobre muestras de sangre Rh$-$ y probabilidad 0'80 de dar el resultado correcto sobre muestras Rh+. Si la población es 84% Rh+ y 16% Rh$-$, halla la probabilidad de que si el resultado del test

a. es Rh+, la muestra lo sea;

b. es Rh$-$, la muestra también lo sea.

13. De cara al invierno se ha vacunado contra la gripe el 30% de la población. Se observa que el 80% de los enfermos de gripe no está vacunado. ¿Ha sido de algún efecto la vacuna?

14. Repoblamos un monte con una especie de pinos de los que usamos tres lotes distintos. El lote A constituye el 40% de los pinos y sus ejemplares han sido modificados genéticamente para resistir el ataque de una especie de oruga. Los otros dos lotes, B y C, que constituyen el 25% y el 35% respectivamente, no son resistentes a la oruga.

Resulta que de los pinos plantados sobrevive un 55% de la población A, un 45% de la población B y un 40% de la población C. ¿Que porcentaje de los pinos que sobreviven es resistente a la oruga?

15. Halla la probabilidad de que al arrojar una moneda al aire diez veces consecutivas la diferencia entre el número de caras y el número de cruces obtenidas sea estrictamente mayor que 6.

Solución: $B(10, \frac{1}{2})$; $2(10^{+}1)\frac{1}{2}^{10}$.

16. Recordemos que en el experimento de Mendel con guisantes la probabilidad de obtener un guisante verde rugoso es de 1/16. Supongamos que estamos en esta situación y tenemos una "cosecha" de 1216 guisantes. ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer el recuento encontremos un número de guisantes del tipo verde-rugoso comprendido entre 73 y 79 ambos inclusive? Escribe la solución como una suma de términos sin calcular su valor. Utiliza la aproximación normal para evaluar aproximadamente esa suma.

Solución: $B(1216, \frac{1}{16})$; 0'3215; aproximación normal: 0'3182

17. Un ordenador genera de forma aleatoria el código de conexión (*password*) de cada nuevo usuario. Si este código consta de 6 caracteres elegidos al azar entre las 26 letras y los 10 dígitos, calcula la probabilidad de **a.** que no contenga ningún dígito; **b.** que no contenga ninguna letra; **c.** que empiece por letra y termine en dígito.

18. Calcula las mismas probabilidades que en los apartados **a.** y **b.** del ejercicio anterior cuando no se permite la repetición de caracteres.

19. Las ruletas europeas tienen 37 números, del 0 al 36. El número 0 siempre corresponde a la banca (el casino).
a. Si apostamos a impar (esto significa que si sale cualquier número impar, ganamos), ¿cuál es la probabilidad de ganar?
b. Si apostamos 50 veces consecutivas a impar, ¿Cual es la probabilidad de acertar al menos 35 veces? (utiliza la aproximación normal a una binomial para dar la respuesta).

20. Las ruletas americanas suelen tener 38 números; además de los anteriores tienen un doble 0, (00), que también pertenece a la banca. Contesta las preguntas del ejercicio anterior en esta nueva situación.

21. **a.** Estudia la variable aleatoria (v.a.) $X =$ *número de Ases en una tirada de dos dados*. ¿Qué distribución tiene?
b. Halla el valor esperado y la varianza de $G =$ *mi ganancia por tirada* si juego contra alguien del modo siguiente: debo pagar 1 Euro cada vez que salga un As, pero recibo 9 Euros cada vez que salgan dos Ases.
c. ¿Aproximadamente, qué probabilidad tengo de ganar algo si repito este juego 100 veces?

22. Considera un grupo de N personas. Teniendo en cuenta que el año tiene 52 semanas,
a. estudia la v.a. $X =$*número de personas en ese grupo que cumplen años en la última semana del año*. ¿Qué distribución tiene? ¿Qué hipótesis y simplicaciones tienes que hacer para afirmarlo?
b. suponiendo ahora que empezamos a preguntar, una tras otra, a las N personas, estudia la v.a. $K =$*número de personas preguntadas ANTES de encontrar la primera que cumpla la condición citada*. ¿Qué distribución tiene?
c. trata de hallar el valor esperado de K, o por lo menos escribir la fórmula (la suma) que lo calcula.
d. estudia la distribución de las v.a.'s citadas suponiendo que entre las N personas hay n que cumplen la condición.

23. De un cultivo de bacterias extraemos $1\,ml.$ del que ponemos una gota en un portaobjetos. Suponiendo que cada una de las N bacterias presentes en ese ml tuvo igual probabilidad $p = 1/100$ de estar en la gota, estudia qué distribución tendrá la v.a. $X =$*número de bacterias en la gota*. Si fuese $N > 400$, ¿Qué probabilidad hay de que no encontremos ninguna bacteria en la gota? ¿Y de que encontremos $X < 3$?

24. El lobo ibérico en el norte de la provincia de León es una preocupación constante de ganaderos y biólogos. Queremos estimar la población de la especie en un determinado territorio en el que suponemos que no hay migraciones. Para ello atrapamos de forma aislada diez ejemplares adultos, los marcamos y volvemos a liberarlos. Al cabo de un cierto tiempo (un mes) capturaremos, también de forma aislada, tres ejemplares y veremos cuántos de ellos están marcados (T) y cuántos no marcados (N).
Supongamos primero que vamos a tener en cuenta, y anotar, el orden en el que los hemos atrapado y anotamos en este orden sus cualidades, por ejemplo TNN ó NNN.
a. Haz una lista con todos los resultados posibles.
b. ¿Cuántos resultados tienen dos N's y una T?
c. ¿Cuántos resultados acaban en T?
Si la población total de lobos en el territorio estudiado fuese de 100 ejemplares ¿cuál sería la probabilidad de
d. obtener el resultado TNN?
e. obtener el resultado NTN?
f. que nuestro resultado tenga dos N's y una T?
No sabemos cuál es el número total de lobos pero hemos obtenido la secuencia TNN y con este resultado queremos estimar este número, n.
g. En función de n, ¿qué probabilidad tiene *a priori* el resultado obtenido?
h. Difícil ¿Qué valor de n hace que esta probabilidad sea lo más alta posible?
Este valor puede servirnos de estimador del número total de lobos.
Supongamos ahora que desconocemos el orden en que hemos capturado los tres lobos. Solamente sabemos que dos son N y uno es T
i. De nuevo en función de n, ¿qué probabilidad tiene *a priori* el resultado obtenido?
j. Difícil ¿Qué valor de n hace que esta probabilidad sea lo más alta posible?
Este es el valor que utilizamos como estimación de n en este caso.