

--	--	--	--	--

MATEMÁTICAS

PRIMER CURSO DE BIOLOGÍA

15 DE FEBRERO DE 2001

El examen consta de 4 ejercicios. Cada ejercicio debe responderse en su hoja, en el espacio que se ha dejado detrás de cada pregunta. Por favor, **NO** desgrapes las hojas. **Se espera una breve explicación de cada respuesta.**

TIEMPO TOTAL: 3 HORAS

Apellidos _____ Nombre _____

Grupo _____ DNI _____

1.

a. i) Solamente uno de los tres diagramas de pendientes siguientes corresponde a la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x}{1+x^2}.$$

Tacha en cada figura la respuesta incorrecta. Justifica en la página de atrás el por qué.

Fig. 1 SI NO

Fig. 2 SI NO

Fig. 3 SI NO

→

COMENTARIOS:

Figura 1:

El campo **no** es horizontal sobre $x = 0$.

El campo **no** es invariante por traslaciones horizontales.

Figura 2:

El campo es horizontal sobre —digamos— $x = 1, t = 0$.

El campo **no** es invariante por traslaciones en la variable independiente.

Figura 3:

Vale 0 sobre $x = 0$.

Es simétrico respecto del eje horizontal ($x = 0$).

ii) ¿Cuál es la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{1+x^2}, \\ x(0) = 0 \quad ? \end{cases}$$

$x(t) = 0 \implies x'(t) = 0$ por lo que verifica la ecuación y el dato inicial.

Por otra parte, se observa directamente en la Figura 3 que $x = 0$ es solución.

$x = 0$

b.

i) Comprueba que $x(t) = -1 + e^{2t}$ es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = 2x + 2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

$$x'(t) = 2e^{2t},$$

$$2x(t) + 2 = 2e^{2t} - 2 + 2 = 2e^{2t} \quad \checkmark$$

$$x(0) = -1 + e^0 = 0 \quad \checkmark$$

ii) ¿Cuál es la solución del problema

$$\begin{cases} x' = 2x + 2, \\ x(1) = 0 \quad ? \end{cases}$$

No es más que una traslación de la solución de i):

$$x(t) = -1 + e^{2(t-1)}$$

$$x(1) = -1 + e^{2(1-1)} = -1 + e^0 = 0.$$

$-1 + e^{2(t-1)}$

Apellidos _____ Nombre _____

Grupo _____ DNI _____

2. La duración de la gestación en la mujer, desde la concepción hasta el parto, sigue una distribución aproximadamente normal, con una media de 266 días (38 semanas) y una desviación típica de 16 días.

a. ¿Qué proporción de los partos se produce tras 273 días (39 semanas) de gestación?

$$\frac{273 - 266}{16} = 0'44.$$

33%

b. ¿Qué proporción de las gestaciones dura entre 252 días (36 semanas) y 280 días (40 semanas)?

$$\frac{252 - 266}{16} = -0'875; \quad \frac{280 - 266}{16} = 0'875.$$

62%

c. Un parto se considera prematuro si ocurre antes de finalizar la semana número 32 de gestación. ¿Qué proporción de partos prematuros debe esperar un ginecólogo entre sus pacientes?

$$\frac{224 - 266}{16} = -2'63$$

0'4%

d. Halla el número de días de gestación antes del cual se producen el 90% de los partos.

$$z = 1'28; \quad 266 + 1'28 \cdot 16 = 286'48.$$

287 días

e. Halla el intervalo central (alrededor de la media) en el cuál se producen el 90% de los partos.

$$z = 1'64; \quad 266 \pm 1'64 \cdot 16; \quad [239'76, 292'24]$$

[239, 293]

Apellidos _____ Nombre _____

Grupo _____ DNI _____

3. Un cultivo de bacterias crece a un ritmo del 3% por minuto.

a. Si el cultivo tiene inicialmente una biomasa de 1 g. ¿Qué biomasa tendrá al cabo de 5 min?

$$x(n) = 1 \cdot (1'03)^n; \quad n = 5 \longrightarrow (1'03)^5 = 1'1593$$

1'16 g

b. ¿Cuánto tarda en doblarse la biomasa?

$$(1'03)^n = 2; \quad n \log(1'03) = \log 2; \quad n = 23'45$$

23'5 min

c. Si tras cada minuto se retiran 0'1 g del cultivo para usar en un experimento,

i) escribe la ecuación de recurrencia que relaciona x_{n+1} con x_n donde x_n = gramos de biomasa tras n minutos;

$x_{n+1} = (1'03)x_n - 0'1$

ii) escribe una "fórmula cerrada" para x_n (recuerda que $x_0 = 1$ g).

$$x_1 = (1'03)x_0 - 0'1$$

$$x_2 = (1'03)x_1 - 0'1 = (1'03)^2x_0 - 0'1(1'03 + 1)$$

...

$$x_n = (1'03)x_{n-1} - 0'1 = (1'03)^n x_0 - 0'1((1'03)^{n-1} + (1'03)^{n-2} + \dots + (1'03) + 1).$$

$(1'03)^n x_0 - (0'1) \frac{(1'03)^n - 1}{0'03}$

d. Si cada 5 min se retira la mitad del cultivo, después de un largo periodo de tiempo ha crecido o decrecido?

$$x_5 = (1'03)^5 \cdot 0'5x_0 = 0'58x_0$$

$$x_{10} = (1'03)^5 \cdot 0'5x_5 = (0'58)^2x_0$$

Decrece

Apellidos _____ Nombre _____

Grupo _____ DNI _____

4. Se sabe que el coeficiente de correlación lineal entre la estatura del hombre y la estatura de la mujer en parejas estables de 25 años es $r = 0'5$. A esta edad la estatura de las mujeres tiene una media de 164 cm y una desviación típica de 6'35 cm, y la estatura de los hombres tiene una media de 174 cm y una desviación típica de 6'80 cm.

- a. Halla la recta de regresión que predice la estatura de la mujer sobre la estatura del hombre en parejas estables de 25 años.

$$M - \bar{M} = \frac{\sigma_M}{\sigma_H} r (H - \bar{H}); \quad M - 164 = \frac{6'35}{6'80} 0'5 (H - 174).$$

$$M = 0'467H + 82'74$$

- b. Halla la recta de regresión que predice la estatura del hombre sobre la estatura de la mujer en parejas estables de 25 años.

$$H - \bar{H} = \frac{\sigma_H}{\sigma_M} 0'5 (M - \bar{M}); \quad H = 174 + (0'535)(M - 164).$$

$$H = (0'535)M + 86'26$$

- c. Dibuja ambas rectas sobre los ejes que se proporcionan y señala en ambos casos el punto de las medias.

- d. ¿Qué predicción podemos hacer para la estatura de la mujer de una pareja de esta edad si la estatura del hombre es de 181 cm?

$$H = 181; \longrightarrow M = 164 + 0'467(181 - 174).$$

$$167'3 \text{ cm}$$

- e. ¿Qué predicción podemos hacer para la estatura del hombre de una pareja de esta edad si la estatura de la mujer es de 170 cm?

$$M = 170; \longrightarrow H = 174 + 0'535(170 - 164).$$

$$177'2 \text{ cm}$$