1. Escribe la ecuación paramétrica de la recta $2x_1 + 3x_2 = 1$. Escribe la ecuación implícita de la recta

$$\begin{cases} x_1 = 3 - t \\ x_2 = -1 + 2t \end{cases}$$

¿Tienen estas rectas algún punto en común? En caso afirmativo, hállalo.

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 5)$ y es perpendicular a la recta $y = 3x - 7$.

3. Halla la distancia del punto $(1, 3)$ a la recta $2x + 3y = 24$.

4. Escribe la ecuación implícita del plano

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2t + 3s \\ x_2 = - t + s \\ x_3 = 2 + t \end{cases}$$

Determina el vector director de la recta intersección de dicho plano con el plano $x_2 + x_3 = 0$.

5. Dado el plano $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$ halla los puntos en los que interseca a los ejes coordenados y el punto P del plano que está más cerca del origen.
(Representa gráficamente los tres primeros. Uniéndolos para formar un triángulo se puede visualizar el plano.)

6. Considera las rectas del espacio tridimensional

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Determina si se cortan.

7. Los tres vértices de un triángulo en el plano son

$$P_1 = (2, 1), \quad P_2 = (4, -2), \quad P_3 = (5, 3).$$

Halla la longitud de los lados y los ángulos del triángulo. Calcula su área.

8. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determina si son linealmente independientes o no.

9. ¿Para qué valores de λ, los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no están en un mismo plano?

10. Determina el plano que pasa por los puntos $(2, 1, 0)$, $(-1, 0, 3)$ y $(1, 1, 2)$. Halla la recta perpendicular a dicho plano trazada desde el origen de coordenadas.

11. Calcula la distancia del punto $P = (-4, 1, -5)$ a la recta que tiene ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

12. Resuelve los siguientes SEL:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

13. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

¿Para qué valores del parámetro λ se hace nulo el determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \quad ?$$

14. Realiza la siguientes multiplicaciones de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

¿Qué puedes decir acerca de las dimensiones de los factores y del producto? Sin repetir cálculos ya realizados, escribe el resultado de los siguientes productos de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Halla el rango de todas las matrices que aparecen en este ejercicio.

15. Sea $\mathbf{A}$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Realiza la siguientes multiplicaciones de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{A}; \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}; \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observa qué efecto produce en la matriz $\mathbf{A}$ cada una de las operaciones.

16. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula tres vectores v_1, v_2 y v_3 tales que

$$\mathbf{A}v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Forma una matriz $\mathbf{B}$ cuyas columnas son los vectores v_1, v_2, v_3. Comprueba que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices inversas.

17. Calcula la matriz a_{ij} tal que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Indicación: Plantea un SEL con como incógnitas).

18. Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

19. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales A y B. Se sabe que cada día un 70% de aves del humedal A se traslada a B mientras que un 50% de aves de B lo hace a A.

a. Dibuja el diagrama de estados y escríbelo después en forma matricial.

b. Si inicialmente había el mismo número de aves en cada humedal, ¿que porcentaje de éstas están en cada uno de ellos después de dos días?

c. Si inicialmente había 120 aves en cada humedal ¿qué evolución seguirá el sistema a largo plazo?

20. Estudiamos una población de aves (con el mismo número de machos que de hembras). Sabemos que un 12% de las nacidas en un año pasan a adultas al año siguiente y que un 54% de adultas sobrevivirán al año siguiente. Cada hembra adulta produce dos hembras cada año.

a. Dibuja el diagrama de estados y escríbelo después en forma matricial.

b. Transcurridos unos años, determina en que tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población de hembras.

c. Determina cuál debe ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantenga estable.

21. El primer día de cada mes me abonan los intereses en mi cuenta de ahorro por un $0'5\%$ del saldo presente e inmediatamente después transfieren a mi cuenta corriente el $0'5\%$ del saldo resultante tras la operación anterior. ¿Si no hubiera otros movimientos, cuánto tiempo tardaría mi cuenta corriente en recibir una cantidad igual a la que coloqué inicialmente en mi cuenta de ahorro? ¿Qué saldo tendré en ésta en ese momento?

22. Una balsa de lodo, que permanece con volumen constante, contiene productos tóxicos. La balsa desagua por filtraciá través de un curso de agua cercano en el que observamos, tras la citada filtración, una concentración de tóxicos igual al 10% de la que hay en la balsa.
Una depuradora opera en la balsa y trata cada hora el $0'1\%$ del contenido de la balsa con una efectividad del 85% sobre el lodo que trata. Aguas abajo otra depuradora trata todo el caudal de la corriente con una efectividad del 40%.
Formula un modelo que estudie cuento tardará en reducirse la concentración de tóxicos en un factor 10 a la salida de la segunda depuradora.

23. Un estudio realizado sobre sobre varias poblaciones de ballenas azules produjo los siguientes datos: las hembras no producían ninguna cría antes de los 4 años de edad; sus fertilidades medias a partir de ese momento eran (número medio de crías hembras durante un periodo de cuatro años)

GRUPO DE EDAD:	4 a 7	8 a 11	12 a 15
NO. MEDIO DE CRÍAS:	0'63	1'00	0'90

la mortalidad a lo largo de los cuatro años era del 43% en cada grupo de edad.
Formula un modelo matricial para esta población.

24. Un modelo de pesquería. Clasificamos los ejmplares en tres clases de edad que numeramos 1, 2, y 3. En las clases 1 y 2 ponemos a los que tienen menos de un año y entre uno y dos años, respectivamente. En la clase 3 todos los que tienen más de dos años. La supervivencia en ausencia de explotación es de un 75% en las clases 1 y 2, y de un 20% en la clase 3. La media de peso por ejemplar se multiplica por los factores 4, 2'4, y 1 respectivamente (es decir que los de la clase 3 ya no aumentan de peso). Mientras la población no descienda por debajo de un cierto umbral, la cantidad de nuevos peces es la misma cada año, dependiendo ligeramente de la cantidad de peces de la clase 2: según las estimaciones disponibles el peso total de nuevos peces viene siendo de $w + 0'03 \cdot x_2$, donde w es una constante y x_2 es el peso total de los peces de la clase 2 el año anterior.
Formula un modelo matricial para la situación descrita.
Supongamos ahora que a la situación anterior se añade la explotación pesquera siguiente: por el tamaño de redes utilizado cae en la red el 30% de los peces de cada clase, pero esta solamente retiene a los de la clase 3. La pesca se realiza al comienzo del ciclo, por lo que la mortalidad natural solamente afecta a los no capturados. En función de w, estudia cuales serán el estado de equilibrio X_e, y el peso total de las capturas anuales W.
Realiza el mismo estudio si se utiliza una red más fina que retenga también los peces de la clase 2, o una red aún más fina que retenga incluso los de la clase 1.

25.

En una granja de cría de cerdos se hace cada 31 de diciembre, inmediatamente antes de la matanza, un censo de los animales, clasificándolos según sus edades:

(1) «lechones»: los nacidos durante el último año.
(2) «jóvenes»: los que ya han cumplido un año.
(3) «adultos»: los que ya han cumplido dos años.

El procedimiento de gestión de la granja durante el año que comienza es:

- Se deja engordar a todos los lechones.
- Se dedica a todas las hembras jóvenes y adultas a la cría. Se sabe que, en media, cada hembra joven tendrá 0.5 camadas de 5 lechones, cada hembra adulta 0.8 camadas de 5 lechones y que el 50% de todos los nuevos nacidos serán hembras.

- Se sacrifica al 60% de los nuevos nacidos (la misma cantidad de machos que de hembras) para su consumo como «cochinillos».
- Se sacrifica para su consumo a todos los animales que en ese momento son «adultos». No se sacrifica a ninguno de los jóvenes, y se supone que ningún animal muere por otras causas.

Formula el modelo apropiado para describir el número de animales de cada clase.

26. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.
b. Calcula el autovalor dominante de A y un autovector asociado.
c. Sea $X(k)$ el número de animales de cada grupo en la etapa k. Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula $X(1), X(2), X(3)$ y $X(4)$. A partir de $X(4)$ calcula la proporción exacta de individuos de cada grupo respecto al total de la población en la etapa 4.
d. Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante, y compara el resultado obtenido en este apartado con el del apartado anterior.

27. Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una población de venados hembras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.
a. Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.
b. Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlarla permitiendo la caza de venados adultos. Si h es la proporción de adultos cazados en cada período, ¿cuál será ahora la matriz de transición? (Observación: La proporción h se considera sobre el total de adultos al final del periodo, una vez que ya se ha tenido en cuenta la natalidad y la mortalidad debida a otras causas distintas a la caza)
c. Prueba que $h = 0.6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.
d. Es posible seleccionar h de manera que la población de venados no crezca ni desaparezca. ¿Cuál sería ese valor de h?

28. En el curso de un río, que tiene un flujo muy regular, hay tres cascadas que caen sobre tres pequeñas lagunas. Cada laguna vierte cada hora un 10% de su contenido en la siguiente (la última río abajo). Se acaba de verter una cantidad de una sustancia tóxica (muy soluble) en la primera laguna.
a. Formula el modelo correspondiente a la cantidad de sustancia tóxica en cada una de las tres lagunas.
b. Formula el modelo en una situación idéntica a la anterior pero suponiendo que se produce un vertido de una cantidad c de la sustancia tóxica cada hora. En este caso, estudia el comportamiento a largo plazo del sistema.

29. Supongamos que, entre una generación y la siguiente, una familia cambia la clase social a la que pertenece (1, baja; 2, media; 3, alta) de acuerdo con las siguientes probabilidades de transición:

$$\begin{pmatrix} .6 & .2 & .1 \\ .3 & .7 & .3 \\ .1 & .1 & .6 \end{pmatrix}.$$

A largo plazo, ¿se estabilizan las proporciones de las familias pertenecientes a cada una de las clases? Si la respuesta es afirmativa, ¿qué proporción de familias pertenece a largo plazo a cada clase?

30. La fotocopiadora del departamento está siempre en uno de los dos estados siguientes: o funciona o está rota. Si funciona hoy, funcionará mañana con una probabilidad del 70%. Si hoy está rota, con una probabilidad del 50% estará rota todavía mañana. Supongamos que un día es la unidad de tiempo natural en este caso.
a. Dibuja un diagrama de estados para este escenario.
b. Formula la matriz de transición.
c. Suponiendo que la máquina funciona hoy, ¿cuál es la probabilidad de que funcione mañana? ¿Y al día siguiente? ¿Después de una semana? ¿Después de un mes?
d. ¿Cuál es la probabilidad a largo plazo de que la fotocopiadora funcione un día cualquiera?

31. Un modelo simplificado de transmisión de una enfermedad es el siguiente: el tamaño de la población es $N = 5$, algunos de los individuos están contagiados y otros no. En cada etapa, se seleccionan aleatoriamente dos individuos de la población que interaccionan, de forma que, si sólo uno de ellos está enfermo le contagia la enfermedad al otro con probabilidad $p \in (0, 1)$. Si X_n el número de individuos enfermos en la etapa n, entonces X_n es una cadena de Markov.
a. Representa el diagrama correspondiente.
b. Calcula las probabilidades de transición (en función de p.)
c. ¿Hay algún estado absorbente? Si la respuesta es afirmativa, calcula las probabilidades de absorción.