Teoría de la Integral y de la Medida.

Hoja de Problemas n.º 2: Álgebras y σ-álgebras; medidas; funciones medibles

1. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprueba que la familia de conjuntos

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

forma una σ-álgebra en X.

2. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Construye la σ-álgebra generada por $\mathcal{E} = \{\{a\}\}$ y la σ-álgebra generada por $\mathcal{E} = \{\{a\}, \{b\}\}$.

3. Comprueba que la unión de dos σ-álgebras no tiene por qué ser una σ-álgebra. Da un ejemplo en el que las σ-álgebras de partida tengan infinitos elementos.

4. Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de X. Demuestra que $\mathcal{B} = \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra de Y.

5. Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{B}$ una σ-álgebra de Y. Demuestra que $\mathcal{A} = \{g^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}\}$ es una σ-álgebra de X.

6. Demuestra que una álgebra $\mathcal{A}$ de X es σ-álgebra si y solo si es cerrada para uniones numerables crecientes (es decir, si $E_i \in \mathcal{A}$, y $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, entonces $\cup_1^\infty E_i \in \mathcal{A}$).

7. Determina el álgebra $\mathcal{A}$ generada por la colección de los subconjuntos finitos de un conjunto X no-numerable. Determina la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{A}$. Estudia el mismo problema en el caso en que X sea un conjunto infinito numerable.

8. La σ-álgebra de $X = (0, 1]$ engendrada por $\mathcal{E} = \{(0, \frac{1}{n}] : n = 1, 2, \cdots\}$ está formada por uniones finitas o numerables de intervalos $(a, b]$. Estudia cómo son estos intervalos.

9. Describe la σ-álgebra de $\mathbb{N}$ engendrada por $\mathcal{E} = \{N \subset \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\,,\ 2n \in N\}$.

10. Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra de cardinal infinito. Demuestra que tiene cardinal no numerable.

11. Halla una cota superior al número de elementos que puede tener una σ-álgebra engendrada por n elementos. SUGERENCIA: Halla primero el cardinal de la σ-álgebra generada por una partición con n elementos.

12. Se llama σ-anillo de subconjuntos de un conjunto X a toda familia no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X cerrada para las uniones numerables y para las diferencias. Demuestra que todo σ-anillo también es cerrado para las intersecciones numerables. Demuestra que todo σ-anillo de X es una σ-álgebra si y solo si $X \in \mathcal{F}$.

13. Se llama «clase monóntona» de un conjunto X a toda familia no vacía $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X que sea cerrada para las uniones crecientes y para las intersecciones decrecientes (es decir, si $\forall i = 1, 2, \ldots,$ $C_i \in \mathcal{M}$ y $C_i \subset C_{i+1}$ o $C_i \supset C_{i+1}$ entonces $\cup_i C_i \in \mathcal{M}$ o $\cap_i C_i \in \mathcal{M}$, respectivamente). Demuestra que toda σ-álgebra es clase monótona. Da un ejemplo de una clase monótona que no sea σ-álgebra.

14. (DIFÍCIL) Demuestra que la mínima clase monótona que contiene a un álgebra dada $\mathcal{A}$ es también una σ-álgebra.

15. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Si $E, F \in \mathcal{M}$, comprueba que $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

16. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $E \in \mathcal{M}$. Para cada $A \in \mathcal{M}$, sea $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. Comprueba que μ_E es una medida.

17. Sea X un conjunto infinito numerable. Para $A \subset X$, se define

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito,} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

a. Comprueba que μ es una medida finitamente aditiva (en $\mathcal{P}(X)$), pero no numerablemente aditiva.
b. Comprueba que existe una sucesión creciente de conjuntos $\{A_n\}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(A_n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n A_n = X.$$

18. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles. Si $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$, prueba que $\mu(A) = \lim_n \mu(\bigcup_{j=0}^{n}(A_j))$.

19. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de $\mathcal{M}$. Demuestra que si existe k tal que $\mu(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j) < \infty$ entonces

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \qquad \text{y} \qquad \mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j).$$

En particular si $\mu(X) < \infty$ entonces
a. $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \leq \limsup \mu(E_j) \leq \mu(\limsup E_j)$.
b. Si existe $\lim E_j$ entonces $\mu(\lim E_j) = \lim \mu(E_j)$.
Indica en qué punto es necesaria la condición $\mu(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j) < \infty$ para al menos un k.
Recuérdese: $\liminf E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j$, $\limsup E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$.

20. Sean $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ la medida discreta. Construye una sucesión (A_n), $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, tal que $\lim_n A_n = \varnothing$ y $\lim_n \mu(A_n) \neq 0$.

21. Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f : (X, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
a. $|\, f \,|$ medible $\Rightarrow f$ medible.
b. $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible.
c. $f_1 \cdot f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible.
d. $f_1 + f_2$ medible y $f_1 - f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medibles.

22. Prueba que si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ verifica que $f^{-1}(r, \infty]$ es medible para todo $r \in \mathbb{Q}$, entonces f es medible.
(El resultado es cierto si se sustituye $\mathbb{Q}$ por un subconjunto A denso en $\mathbb{R}$.)

23. Si $\forall n$, $f_n : (X, \mathcal{M}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B})$ es medible demuestra que $A = \{x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\} \in \mathcal{M}$.