# Teoría de la Integral y de la Medida.

## Hoja de Problemas n.º 1: Integral de Riemann. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

EN ESTA HOJA $m(C)$ REPRESENTA LA MEDIDA DE LEBESGUE DEL CONJUNTO $C$.

**1.** Demuestra que el valor absoluto de una función $f$ que sea integrable Riemann es también una función integrable Riemann y entonces $|\int f| \leq \int |f|$.

**2.** Sean $f, g$ funciones integrables Riemann en el intervalo $[a, b]$. Demuestra que la función $h$, definida como $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, también es integrable Riemann.
Este resultado se extiende con facilidad a una función definida como máximo de un número finito de funciones. Muestra que en general no es cierto para una sucesión.

**3.** Sea $\{q_1, q_2, q_3, \dots\} = I \cap \mathbb{Q}$ una enumeración de los racionales de un intervalo cerrado $I = [a, b]$. Para cada $k = 1, 2, 3, \dots$, sea

$$Y_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \\ \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}. \end{cases}$$

Demuestra que $Y_k$ es integrable Riemann.
Sea $Y(x) = \lim_k Y_k(x)$. Demuestra que $Y$ **no es** integrable Riemann.

**4.** Con la notación del ejercicio anterior, sea

$$Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x = q_k \\ \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestra que la función $Z$ así definida es integrable Riemann en $I$ y calcula $\int_a^b Z(x)dx$.

**5.** Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones integrables Riemann en un intervalo $I = [a, b]$. Demuestra que si la función $f$ es límite uniforme de una tal sucesión (i.e. $\lim_n \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$) entonces $f$ es integrable Riemann y además

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

**6.** Sea $(f_n)$ una sucesión monótona creciente de funciones continuas en un intervalo $I = [a, b]$ que converge en dicho intervalo a otra función continua $f$. Demuestra que entonces

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

**7.** Si $\{I_k = (a_k, b_k)\}$, $k = 1, 2, \dots, N$ es un recubrimiento por intervalos abiertos del intervalo cerrado $I = [a, b]$ $(a < b)$, demuestra que

$$b - a \leq \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k).$$

INDICACIÓN: Aunque el resultado se puede demostrar directamente, resulta más sencillo recurrir al cálculo de las integrales de Riemann de las funciones características (indicatrices) de $I_k$ y de $I$.

**8.** Demuestra que para cualquier subconjunto $S$ de un intervalo cerrado $[a, b]$

$$\operatorname{cont}^+(S) = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{N} |I_n| \; : S \subset I_1 \cup \cdots \cup I_N \, , I_n = [a_n, b_n] \right\}.$$

**9.** Demuestra que si $A \subset (a, b)$ es unión disjunta de los intervalos abiertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces

$$m^\star(A) = \sum_n |I_n|$$

**10.** Sea $K$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Demuestra que si $K \subset (a, b)$ entonces $m(K) < b - a$.

**11.** Sea $C_n$ una sucesión creciente (es decir: $S_1 \subset S_2 \subset \dots$) de subconjuntos medibles de $(a, b)$. Sea $S = \cup S_n$. Demuestra que $m(S_n)$ es una sucesión creciente con límite $m(S)$.

**12.** Sea $S_n$ una sucesión decreciente (es decir: $S_1 \supset S_2 \supset \dots$) de subconjuntos medibles de $(a, b)$. Sea $S = \cap S_n$. Demuestra que $m(S_n)$ es una sucesión decreciente con límite $m(S)$.

**13.** Sea $S_n$ una sucesión creciente de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_n m(S_n) \nearrow m(\cup_n S_n).$$

Sea $S_n$ un sucesión decreciente de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$. Demuestra que si existe $n_0$ tal que $m(S_{n_0}) < +\infty$ entonces

$$\lim_n m(S_n) \searrow m(\cap_n S_n).$$

Da un contaejemplo que muestre que sin la condición de la finitud de al menos una de las medidas el resultado puede ser falso.

**14.** Sea $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de subconjuntos medibles del intervalo $(a, b)$. Demuestra que si $\lim_n m(S_n \Delta S_0) = 0$ entonces $\lim_n m(S_n) = m(S_0)$.

NOTA: Dados dos conjuntos $A$, $B$, la expresión $A\Delta B$ representa la diferencia simétrica de ambos: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.

**15. Conjunto ternario de Cantor**. Construye el conjunto $K$ de la siguiente manera: $K_0 = [0, 1]$. $K_1$ se obtiene a partir de $K_0$ suprimiendo el intervalo abierto central de longitud $r = 1/3$. $K_1$ es entonces la unión de dos intervalos cerrados de longitud $1/3$. $K_2$ se obtiene suprimiendo de cada uno de los dos intervalos de $K_1$ su intervalo abierto central de longitud $r^2 = 1/9$. Si se continúa el proceso see obtiene una sucesión de cerrados $K_n$ en la que cada uno de ellos es unión de $2^n$ intervalos cerrados, cada uno de longitud $3^{-n}$:

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \searrow K = \bigcap_n K_n.$$

Demuestra que $K$ es compacto en $\mathbb{R}$ (y por tanto medible), que no contiene intervalos abiertos, que no tiene puntos aislados, y que $m(K) = 0$.

**16.** Una modificación de la construcción anterior suprimiendo intervalos abiertos centrales de longitud $r^n = (1/5)^n$ da una sucesión $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots$ en la que $L_n$, $n > 0$ se ha obtenido a partir de $L_0 = [0, 1]$ suprimiendo un intervalo abierto de longitud $1/5$, dos intervalos abiertos de longitud $(1/5)^2$ cada uno de ellos, ..., $2^{n-1}$ intervalos abiertos de longitud $(1/5)^n$. Demuestra que $L = \bigcap_n L_n$ es compacto, que no contiene intervalos abiertos, que no tiene puntos aislados, y que $m(L) > 0$.

INDICACIÓN: Halla $m(L_0 \setminus L)$

**17.** Si $K$ y $L$ son los conjuntos construidos en los dos ejercicios anteriores, demuestra que existe un homeomorfismo $F : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $F(L) = K$.