Teoría de la integral y de la medida.

Hoja de ejercicios n.º 3: Medidas. Medida exterior.

1. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Si $E, F \in \mathcal{M}$, comprueba que $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

2. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $E \in \mathcal{M}$. Para cada $A \in \mathcal{M}$, sea $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. Comprueba que μ_E es una medida.

3. **a.** Comprueba que una medida σ-finita es semifinita. **b.** Sean X un conjunto no numerable y μ la medida discreta en $(X, \mathcal{P}(X))$. Comprueba que μ es semifinita pero no es σ-finita.

4. Sea X un conjunto infinito numerable. Para $A \subset X$, se define

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito,} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

a. Comprueba que μ es una medida finitamente aditiva (en $\mathcal{P}(X)$), pero no es numerablemente aditiva.

b. Comprueba que existe una sucesión creciente de conjuntos $\{A_n\}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(A_n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n A_n = X.$$

5. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles. Si $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$, prueba que $\mu(A) = \lim_n \mu(\bigcup_{j=0}^{n}(A_j))$.

6. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de $\mathcal{M}$. Demuestra que si existe k tal que $\mu(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j) < \infty$ entonces

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \qquad \text{y} \qquad \mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j).$$

En particular si $\mu(X) < \infty$ entonces

a. $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \leq \limsup \mu(E_j) \leq \mu(\limsup E_j)$.

b. Si existe $\lim E_j$ entonces $\mu(\lim E_j) = \lim \mu(E_j)$.

Indica en qué punto es necesaria la condición $\mu(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j) < \infty$ para al menos un k.

Recuérdese: $\liminf E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j$, $\limsup E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$.

7. Sean $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ y μ una medida en $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mu(\{a_1\}) = \mu(\{a_2\}) = \mu(\{a_3\}) = \frac{1}{3}$. Se considera la sucesión de conjuntos (A_n) tal que $A_{2k} = \{a_1, a_2\}$ y $A_{2k+1} = \{a_3\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Prueba que:

$$\mu(\liminf A_n) < \liminf \mu(A_n) < \limsup \mu(A_n) < \mu(\limsup A_n).$$

8. Sean $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ la medida discreta. Construye una sucesión (A_n), $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, tal que $\lim_n A_n = \varnothing$ y $\lim_n \mu(A_n) \neq 0$.

9. Sea μ una medida semifinita y sea E tal que $\mu(E) = \infty$. Prueba que si c es un número real mayor que cero, existe un conjunto $F \subset E$ tal que $c < \mu(F) < \infty$.

SUGERENCIA: Si $k = \sup\{\mu(A) : A \subset E,\ \mu(A) < \infty\}$ entonces $k = \infty$

10. En un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos medibles tales que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Prueba que casi todo elemento $x \in X$ pertenece solo a un número finito de A_n.

(En otra palabras, el conjunto de los puntos x que pertenecen a infinitos de los A_n tiene medida cero.)

11. Sea $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ un espacio de medida completo. Sean $g : X_1 \to X_2$ una aplicación, $\mathcal{M}_2 = \{A \subset X_2 : g^{-1}(A) \in \mathcal{M}_1\}$, y $\mu_2(A) = \mu_1(g^{-1}(A))$. Comprueba que $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ es un espacio de medida completo.

12. Sea X un conjunto cualquiera. Se define $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ mediante $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(A) = 1$, si $A \neq \varnothing$, $A \subset X$. Comprueba que μ^* es una medida exterior. Determina la σ-álgebra de los conjuntos medibles.

13. Sea X un conjunto cualquiera. Se define $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(X) = 2$, $\mu^*(A) = 1$ para $A \neq \varnothing$, $A \neq X$. Comprueba que μ^* es una medida exterior. Determina la σ-álgebra de los conjuntos medibles.

14. Comprueba que toda medida exterior finitamente aditiva es también numerablemente aditiva.

15. Sea X un conjunto no numerable. Sea $\mathcal{M}$ la σ-álgebra formada por los subconjuntos finitos o numerables y los subconjuntos no numerables de complementario finito o numerable. Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ definida mediante $\mu(E) = \operatorname{card}(E)$, si E es finito, $\mu(E) = \infty$ en otro caso.

a. Comprueba que μ es una medida completa en $\mathcal{M}$.

b. Estudia la medida μ^* construida a partir de $\mathcal{M}$ y μ.

16. Se define μ^* sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ como

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mu^*(E) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{si } \operatorname{card}(E) = n, \\ 1 & \text{si } \operatorname{card}(E) = \infty. \end{cases}$$

Prueba que μ^* es una medida exterior y halla la σ-álgebra de los conjuntos medibles.

17. Sean μ^* una medida exterior en X y $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia disjunta de conjuntos μ^*-medibles. Demuestra que para cualquier $E \subset X$, se cumple que $\mu^*(E \cap (\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j)) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$.

SUGERENCIA: Empieza considerando que A_0 es medible y toma como conjunto de prueba $E \cap (\cup_0^\infty A_j)$.

18. Dada una álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, sea $\mathcal{A}_\sigma$ la colección de uniones numerables de conjuntos de $\mathcal{A}$, y $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ la colección de intersecciones numerables de conjuntos de $\mathcal{A}_\sigma$. Sean μ_0 una premedida de $\mathcal{A}$ y μ^* su medida exterior inducida.

a. Si $E \subset X$ y $\varepsilon > 0$ demuestra que existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ y $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

b. Si $\mu^*(E) < \infty$ demuestra que E es μ^*-medible si y solo si $\exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $E \subset B$ con $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

c. Comprueba que si μ_0 es σ-finita entonces no es necesaria la restricción $\mu^*(E) < \infty$ en el apartado anterior.

19. Sea μ^* la medida exterior inducida por una premedida finita μ_0 en un conjunto X. Se define la **medida interior** de un subconjunto E de X como $\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$. Demuestra que E es μ^*-medible si y solo si $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

20. Sea μ^* una medida exterior inducida por una premedida de un conjunto X. Demuestra que todo $E \subset X$ con intersección μ^*-medible con todo A μ^*-medible con $\mu^*(A) < \infty$, es medible.