Teoría de la Medida.

Hoja de Problemas n.º 2: Álgebras y σ-álgebras.

1.- Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprueba que la familia de conjuntos

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

forma una σ-álgebra en X.

2.- Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Construye la σ-álgebra generada por $\mathcal{E} = \{\{a\}\}$ y por $\mathcal{E} = \{\{a\}, \{b\}\}$.

3.- Comprobar que la unión de dos σ-álgebra s no tiene por qué ser una σ-álgebra. Poner un ejemplo en el que las σ-álgebras de partida tengan infinitos elementos.

4.- Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X. Demuestra que $\mathcal{B} = \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra en Y.

5.- Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en Y. Demuestra que $\mathcal{B} = \{g^{-1}(E) : E \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra en X.

6.- Demuestra que un álgebra $\mathcal{A}$ en X es una σ-álgebra si y solo si es cerrada para uniones numerables crecientes (es decir, si $E_i \in \mathcal{A}$, y $E_1 \subset E_2 \subset, \ldots$, entonces $\cup_1^\infty E_i \in \mathcal{A}$).

7.- Determina el álgebra $\mathcal{A}$ generada por la colección de los subconjuntos finitos de un conjunto X no-numerable. Determina la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{A}$. Estudiar el mismo problema en el caso en que X sea un conjunto infinito numerable.

8.- La σ-álgebra de $X = (0, 1]$ engendrada por $\mathcal{E} = \{(0, \frac{1}{n}] : n = 1, 2, \cdots\}$ está formada por uniones finitas o numerables de intervalos $(a, b]$. Estudia cómo son estos intervalos.

9.- Describe la σ-álgebra de $\mathbb{N}$ engendrada por $\mathcal{E} = \{N \subset \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\, ,\, 2n \in N\}$.

10.- Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra de cardinal infinito. Demuestra que tiene cardinal no numerable.

11.- Halla una cota superior al número de elementos que puede tener una σ-álgebra engendrada por n elementos.

12.- Se llama σ-anillo de subconjuntos de un conjunto X a toda familia no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X cerrada para las uniones numerables y para las diferencias. Demuestra que todo σ-anillo también es cerrado para las intersecciones numerables. Demuestra que todo σ-anillo de X es una σ-álgebra si y solo si $X \in \mathcal{F}$.

13.- Se llama «clase monóntona» de un conjunto X a toda familia no vacía $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X que sea cerrada para las uniones crecientes y para las intersecciones decrecientes (es decir, si $\forall i = 1, 2, \ldots,\ C_i \in \mathcal{M}$ y $C_i \subset C_{i+1}$ o $C_i \supset C_{i+1}$ entonces $\cup_i C_i \in \mathcal{M}$ o $\cap_i C_i \in \mathcal{M}$, respectivamente). Demuestra que toda σ-álgebra es clase monótona. Da un ejemplo de una clase monótona que no sea σ-álgebra.

14.- Demuestra que la mínima clase monótona que contiene a un álgebra dada $\mathcal{A}$ es también una σ-álgebra.