

# Teoría de la Integral y de la Medida.

## Hoja de Problemas n.º 1: Integral de Riemann. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

EN ESTA HOJA  $m(C)$  REPRESENTA LA MEDIDA DE LEBESGUE DEL CONJUNTO  $C$ .

1.- Demuestra que el valor absoluto de una función integrable Riemann es también integrable Riemann.

2.- Sean  $f, g$  funciones integrables Riemann en el intervalo  $[a, b]$ . Demuestra que  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  es integrable Riemann. Este resultado se extiende con facilidad al máximo de un número finito de funciones. Muestra que en general no es cierto para una sucesión.

INDICACIÓN:

$$\sup_{x \in I_k} \left\{ \max\{f(x), g(x)\} \right\} - \inf_{x \in I_k} \left\{ \max\{f(x), g(x)\} \right\} \leq \max \left\{ \sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x), \sup_{x \in I_k} g(x) - \inf_{x \in I_k} g(x) \right\}.$$

3.- Sea  $\{q_1, q_2, q_3, \dots\} = I \cap \mathbb{Q}$  una enumeración de los racionales de un intervalo cerrado  $I = [a, b]$ . Para cada  $k = 1, 2, 3, \dots$ , sea

$$Y_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}. \end{cases}$$

Demuestra que  $Y_k$  es integrable Riemann.

Sea  $Y(x) = \lim_k Y_k(x)$ . Demuestra que  $Y$  no es integrable Riemann.

4.- Con la notación del ejercicio anterior, sea

$$Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x = q_k \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestra que la función  $Z$  así definida es integrable Riemann en  $I$  y calcula  $\int_a^b Z(x) dx$ .

5.- Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones integrables Riemann en un intervalo  $I = [a, b]$ . Demuestra que si  $f$  es límite uniforme de dicha sucesión (i.e.  $\lim_n \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ) entonces  $f$  es integrable Riemann y además

$$\lim_n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

6.- Sea  $(f_n)$  una sucesión monótona creciente de funciones continuas en un intervalo  $I = [a, b]$  que converge en dicho intervalo a otra función continua  $f$ . Demuestra que entonces

$$\lim_n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

7.- Si  $\{I_k = (a_k, b_k)\}, k = 1, 2, \dots, N$  es un recubrimiento por intervalos abiertos del intervalo cerrado  $I = [a, b]$ , demuestra que

$$b - a \leq \sum_{k=1}^N (b_k - a_k).$$

INDICACIÓN: Aunque puede demostrarse directamente por inducción resulta más sencillo recurrir al cálculo de las integrales de Riemann de las funciones características (indicatrices) de  $I_k$  y de  $I$

8.- Demuestra que para cualquier conjunto  $C \subset [a, b]$

$$\text{cont}^+(C) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^N |I_n| : C \subset I_1 \cup \dots \cup I_N, I_n = [a_n, b_n] \right\}.$$

9.- Demuestra que si  $\mathcal{O} \subset (a, b)$  es unión disjunta de los intervalos abiertos  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  entonces

$$m^*(\mathcal{O}) = \sum_n |I_n|$$

10.- Sea  $\mathfrak{K}$  un conjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . Demuestra que si  $\mathfrak{K} \subset (a, b)$  entonces  $m(\mathfrak{K}) < b - a$ .

11.- Sea  $C_n$  una sucesión creciente (es decir:  $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ ) de subconjuntos medibles de  $(a, b)$ . Sea  $C = \cup C_n$ . Demuestra que  $m(C_n)$  es una sucesión creciente con límite  $m(C)$ .

12.- Sea  $C_n$  una sucesión decreciente (es decir:  $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ ) de subconjuntos medibles de  $(a, b)$ . Sea  $C = \cap C_n$ . Demuestra que  $m(C_n)$  es una sucesión decreciente con límite  $m(C)$ .

13.- Sea  $C_n$  una sucesión creciente de subconjuntos medibles de  $\mathbb{R}$ . Demuestra que

$$\lim_n m(C_n) \nearrow m(\cup_n C_n).$$

Sea  $C_n$  una sucesión decreciente de subconjuntos medibles de  $\mathbb{R}$ . Demuestra que si existe  $n_0$  tal que  $m(C_{n_0}) < +\infty$  entonces

$$\lim_n m(C_n) \searrow m(\cap_n C_n).$$

Da un contraejemplo que muestre que sin la condición de la finitud de al menos una de las medidas el resultado puede ser falso.

14.- Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles del intervalo  $(a, b)$ . Demuestra que si  $\lim_n m(A_n \Delta A_0) = 0$  entonces  $\lim_n m(A_n) = m(A_0)$ .

NOTA: Dados dos conjuntos  $A, B$ , la expresión  $A \Delta B$  representa la diferencia simétrica de ambos:  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ .

15.- **Conjunto ternario de Cantor.** Construye el conjunto  $K$  de la siguiente manera:  $K_0 = [0, 1]$ .  $K_1$  se obtiene a partir de  $K_0$  suprimiendo el intervalo abierto central de longitud  $r = 1/3$ .  $K_1$  es entonces la unión de dos intervalos cerrados de longitud  $1/3$ .  $K_2$  se obtiene suprimiendo de cada uno de los dos intervalos de  $K_1$  su intervalo abierto central de longitud  $r^2 = 1/9$ . Si se continúa el proceso se obtiene una sucesión de cerrados  $K_n$  en la que cada uno de ellos es unión de  $2^n$  intervalos cerrados, cada uno de longitud  $3^{-n}$ :

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \searrow K = \bigcap_n K_n.$$

Demuestra que  $K$  es compacto en  $\mathbb{R}$  (y por tanto medible), que no contiene intervalos abiertos, que no tiene puntos aislados, y que  $m(K) = 0$ .

16.- Una modificación de la construcción anterior suprimiendo intervalos abiertos centrales de longitud  $r^n = (1/5)^n$  da una sucesión  $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots$  en la que  $L_n, n > 0$  se ha obtenido a partir de  $L_0 = [0, 1]$  suprimiendo un intervalo abierto de longitud  $1/5$ , dos intervalos abiertos de longitud  $(1/5)^2$  cada uno de ellos,  $\dots$ ,  $2^{n-1}$  intervalos abiertos de longitud  $(1/5)^n$ . Demuestra que  $L = \cap_n L_n$  es compacto, que no contiene intervalos abiertos, que no tiene puntos aislados, y que  $m(L) > 0$ .

INDICACIÓN: Halla  $m(L_0 \setminus L)$